UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

APRENDIZAGEM COM COMPREENSÃO DOS CONCEITOS DE LIMITE E CONTINUIDADE: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO COM RECURSO AO GEOGEBRA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, NO BRASIL.

Vilmar Gomes da Fonseca

Orientadora: Prof.ª Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor em Educação na especialidade da Didática da Matemática

2019

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

APRENDIZAGEM COM COMPREENSÃO DOS CONCEITOS DE LIMITE E CONTINUIDADE: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO COM RECURSO AO GEOGEBRA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, NO BRASIL.

Vilmar Gomes da Fonseca

Orientadora: Prof.ª Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor em Educação na especialidade da Didática da Matemática

Júri:

Presidente: Doutor João Pedro Mendes da Ponte, Professor Catedrático e membro do Conselho Científico do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Vogais:

- Doutor António Manuel Dias Domingos, Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa;
- Doutora Maria Cecília Rosas Pereira Peixoto da Costa, Professor Auxiliar com Agregação da Escola de Ciências e Tecnologia da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro;
- Doutor Henrique Manuel Alonso da Costa Guimarães, Professor Associado do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;
- Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques, Professora Auxiliar do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, orientadora.

Esta investigação foi realizada com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil, através da bolsa de estudo nº: 001442/2015-05 e do IFRJ, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro. Esta tese foi desenvolvida no âmbito do Projeto Technology Enhanced Learning at Future Teacher Education Lab, financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia I.P. com a referência PTDC/MHC/CED/0588/2014

2019

Esta investigação foi realizada com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil, através da bolsa de estudo nº: 001442/2015-05 e do IFRJ, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro.

Esta tese foi desenvolvida no âmbito do Projeto *Technology Enhanced Learning at Future Teacher Education Lab*, financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia I.P. com a referência PTDC/MHC/CED/0588/2014

Resumo

O presente estudo visa analisar que compreensão evidenciam os estudantes no processo de aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade de funções, no contexto de uma experiência de ensino de cunho exploratório, integrando o uso do GeoGebra. Para além disso, procuro perceber o contributo do GeoGebra para essa compreensão. A fundamentação teórica foca-se no conhecimento profissional do professor de Matemática, em particular o conhecimento matemático para ensinar e o seu desenvolvimento na formação inicial de professores, no ensino e a aprendizagem com compreensão do limite e continuidade de funções, e nas potencialidades do uso do GeoGebra na aprendizagem desses conceitos matemáticos.

O estudo segue uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa, tendo por base uma experiência de ensino. Os participantes são estudantes do 1.º ano do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Campus Nilópolis, que frequentavam a disciplina de Pré-Cálculo, lecionada pelo investigador. A recolha de dados incluiu a observação participante com gravação em áudio e vídeo das aulas lecionadas, recolha documental do trabalho dos estudantes nas tarefas propostas na experiência de ensino, questionários e entrevistas aos estudantes. A análise dos dados relativos à compreensão que os estudantes evidenciam sobre o limite e continuidade tem por base um referencial de três categorias, nomeadamente, os significados atribuídos aos conceitos, as suas representações e a resolução de problemas que os envolvem, que são consideradas no quadro teórico como componentes dessa compreensão. O papel do GeoGebra nessa compreensão emergiu dos dados e foi analisado com foco nas suas potencialidades e limitações para a aprendizagem desses conceitos matemáticos.

Os resultados do estudo permitem concluir que os estudantes, em geral, evidenciaram uma compreensão *relacional* do limite e continuidade, pois atribuíram-lhes diferentes significados que evidenciam uma conceção adequada desses conceitos, sendo igualmente capazes de reconhecer, representar e transformá-los em suas diferentes representações e de os aplicar na resolução de problemas que apelam à modelação matemática, análise de erros e provas matemáticas. Ademais, as explorações no GeoGebra permitiram a construção de significados corretos do limite e continuidade, favoreceram o trabalho com suas diferentes representações e possibilitaram a resolução de problemas que os envolvem. As principais dificuldades reveladas pelos estudantes contemplam conceções erróneas sobre esses conceitos e fragilidade nas transformações (*tratamentos* e *conversões*) de suas diferentes representações e em procedimentos da Álgebra. No entanto, evidencia-se que algumas dessas dificuldades tenham sido superadas pelos estudantes, com o apoio das explorações no GeoGebra. Os resultados permitem, ainda, fazer uma avaliação positiva do papel das tarefas exploratórias integrando o GeoGebra para a aprendizagem do limite e continuidade de funções, sugerindo que a experiência de ensino com as características definidas neste estudo pode ser usada no ensino dos conceitos matemáticos do ensino superior para promover uma aprendizagem com compreensão desses conceitos.

Palavras-chave: Aprendizagem com compreensão; Limite e Continuidade de funções; Formação inicial de professores; Conhecimento matemático do professor de Matemática; GeoGebra

Abstract

This study aims to analyse the students’ understanding in the learning of the limit and continuity of functions, in a context of a teaching experiment that follows an exploratory approach integrating the GeoGebra as a resource. In addition, I seek to perceive the contribution of GeoGebra to this understanding. The theoretical framework focuses on mathematics teacher’s professional knowledge, in particular the mathematical knowledge for teaching and its development in pre-service teachers education, on teaching and learning with understanding of the limit and continuity of functions, and on the potentialities of using the GeoGebra in the learning of these mathematical concepts.

The study follows a qualitative and interpretive methodology, based on a teaching experiment. The participants are the 1st year students of a degree program in Mathematics at the Federal Institute of Education, Science and Technology of Rio de Janeiro (IFRJ), Campus Nilópolis, who attended the Pre-Calculus course taught by the researcher. Data collection included participant observation with audio and video recording of the lessons, students’ work on the tasks proposed during the teaching experiment, and questionnaires and interviews applied to the students. The data analysis concerning students' understanding of limit and continuity is focus on a three-category theoretical reference, including the meanings of the concepts, their representations and problem solving involving them, which are considered components of understanding. The role of GeoGebra in this understanding emerged from the data and was analysed focus on its potentialities and limitations for the learning of these mathematical concepts.

The results of the study allow to conclude that students, in general, evidenced a *relational* understanding of the limit and continuity, as they attributed to them different meanings that show an adequate conception of these concepts, being also able to recognize, represent and transform them in their different representations and to apply them in solving problems that call for mathematical modeling, analysis of errors and mathematical proofs. In addition, the explorations in GeoGebra allowed the construction of correct meanings of limit and continuity, favored the work with their different representations and enabled solving problems that involve them. The main difficulties revealed by the students contemplate misconceptions about these concepts, and fragility in the transformations (*treatments* and *conversions*) of their different representations and in Algebra procedures. However, is evident that some of these difficulties were overcome by the students with the support of the explorations in GeoGebra. The results also allowed a positive evaluation of the role of exploratory tasks integrating the GeoGebra for the learning of the limit and continuity of functions, suggesting that the teaching experiment with the characteristics defined in this study can be used in the teaching of mathematical concepts in high education to promote the learning of these concepts with understanding.

Keywords: Learning with understanding; Limit and continuity of functions; Pre-service teacher education; Mathematics teacher’s mathematical knowledge; GeoGebra.

Os que forem sábios, pois, resplandecerão como o fulgor do firmamento; e os que a muitos ensinam a justiça, como as estrelas sempre e eternamente.

(Daniel 12.3)

Agradecimentos

Quero agradecer ao único e verdadeiro Deus pela proteção, paz e sabedoria na superação de todos os obstáculos. Se não fosse pela força do Senhor eu não teria conseguido chegar até aqui, e por isso, dedico a ti esta obra.

Agradeço profundamente à minha querida esposa Miriam Fonseca pelo seu grande amor, carinho e companheirismo para comigo. Eu te amo! De igual modo, agradeço aos meus filhos queridos Talita Cristina Fonseca e Miguel Fonseca, por toda a alegria que me têm dado. Sou grato a Deus pela minha família.

Externo minha gratidão e prazer de ter sido orientado pela Professora Doutora Ana Henriques. Obrigado professora Ana Henriques por toda orientação prestada na realização deste estudo e permanentes disponibilidades em responder meus questionamentos. Suas críticas construtivas e reflexões foram essenciais tanto para a conclusão desta tese quanto para meu crescimento enquanto investigador. Sou eternamente grato por todo o apoio e confiança.

Agradeço aos meus pais, José Fonseca e Maria da Penha Fonseca, por todos os ensinamentos de vida empreendidos na minha educação e que me fizeram amadurecer como cidadão e servo de Deus, pelas orações e ajudas nesses anos de ausência do Brasil.

Quero também agradecer aos professores e colegas do Departamento de Didática da Matemática do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, pela confiança e ensinamentos que contribuíram para o meu desenvolvimento profissional enquanto professor e pesquisador. Aos meus amigos Luis Fabián e Guillermo, meus cordiais agradecimentos pela vossa companhia e apoio nesse período de estudo.

Agradeço aos meus irmãos em Cristo da igreja Embaixada Cristã em Portugal, na liderança dos pastores Ismael Silva e Patrícia Silva, e também a todos os irmãos da ADIG no Rio de Janeiro, na liderança do Pr. Elizeu Menezes e Missionária Simmy Cohen, pelo carinho e apoio espiritual. Deus seja louvado pelas vossas vida.

Sou grato também ao Diretor do Instituto Federal do Rio de Janeiro Wallace Vallory e aos meus colegas de trabalho André Silva, Edgar Chipana, José Carlos Gaspar, Armando Luís, Gusttavo Majory e demais professores da Equipe de Matemática do Campus Nilópolis, por todo o apoio e incentivo no desenvolvimento desta pesquisa.

Agradeço a todos os amigos e familiares por torcerem, incentivarem e intercederem para que este trabalho viesse a ser concluído. A todos vocês, meu carinho e gratidão.

Índice

Índice de Tabelas

Índice de Figuras

Índice de Anexos

Lista de Símbolos Matemáticos

Símbolo	Descrição
$\forall$	Quantificador universal, que significa “para todo” ou “qualquer que seja”
$\exists$	Quantificador existencial, que significa “existe”
$\Rightarrow$	Implicação lógica, que significa “implica que”
$\Leftrightarrow$	Equivalência ou implicação dupla, que significa “se, e só se”
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
∞	Símbolo tipográfico de infinito
$[a, b]$	Intervalo fechado da reta real de extremos a e b, equivalente ao conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$
$]a, b[$	Intervalo aberto da reta real, de extremos a e b, equivalente ao conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$
$d(x, y)$	Distância entre dois pontos x e y
f	Abreviatura de função $f: A \to B$ onde A e B são conjuntos não vazios
$f(x)$	Imagem da função f no ponto de abscissa x
D_f	Domínio da função f
$V_\delta(x_0)$	Vizinhança de x_0 de raio δ, isto é, intervalo aberto do eixo Ox (eixo das abscissas) centrado em x_0 e de raio δ. Pode ser representado algebricamente por $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ou $\lvert x - x_0 \rvert < \delta$
$V_\varepsilon(L)$	Vizinhança de L de raio ε, isto é, intervalo aberto do eixo Oy (eixo das ordenadas), centrado em L e de raio ε. Pode ser representado algebricamente por $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$ ou $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$
$x \to x_0$	x tende a x_0, o seja, valores de x convergem a um ponto x_0 sem, entretanto, assumir este valor
$x \to x_0^{+}+$	x tende a x_0 pela direita, o seja, valores de $x > x_0$ convergem a um ponto x_0 sem, entretanto, assumir este valor
$x \to x_0^{-}$	x tende a x_0 pela esquerda, o seja, valores de $x < x_0$ convergem a um ponto x_0 sem, entretanto, assumir este valor
$x \to \infty$	x tende ao infinito, ou seja, valores de x crescem infinitamente em valores positivos
$x \to -\infty$	x tende a menos infinito, ou seja, valores de x decrescem infinitamente em valores negativos
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$	Limite no ponto, isto é, $f(x) \to L$ quando $x \to x_0$
$\lim\limits_{x \to x_0^{+}} f(x) = L$	Limite lateral pela direita, isto é, $f(x) \to L$ quando $x \to x_0^{+}$
$\lim\limits_{x \to x_0^{-}} f(x) = L$	Limite lateral pela esquerda, isto é, $f(x) \to L$ quando $x \to x_0^{-}$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$	Limite infinito, isto é, $f(x) \to \infty$ quando $x \to x_0$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$	Limite no infinito, isto é, $f(x) \to L$ quando $x \to \infty$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$	Taxa de variação instantânea da função f. Expressão algébrica que descreve o declive da reta tangente ao gráfico da função f em $x = x_0$
$\frac{0}{0}$,	Indeterminações de limite, caracterizada por limites de quociente, em que numerador e denominador ambos tendem a zero.
$\frac{\infty}{\infty}$	Indeterminações de limite, caracterizada por limites de quociente, em que numerador e denominador ambos tendem ao infinito.
$0 \cdot \infty$	Indeterminações de limite, caracterizada por limites de produto em que um dos fatores tende a zero e o outro tende a infinito.

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo introdutório começo por apresentar os motivos pessoais para a escolha da aprendizagem com compreensão dos conceitos de limite e continuidade de funções, na formação inicial de professores de Matemática, como temática deste estudo. Apresento também a relevância e pertinência do estudo, atendendo ao contexto de formação e à investigação recente, bem como os objetivos do estudo e as questões que o orientam.

1.1. O ensino e aprendizagem de limite e continuidade de funções: evidências de um problema

Entre os conhecimentos exigidos e que são foco de trabalho nas disciplinas de Matemática em muitos cursos superiores, incluindo a formação inicial de professores de Matemática, os conceitos de limite e continuidade de funções destacam-se por constituírem uma base do Cálculo Diferencial e Integral, frequentemente referido por Cálculo. A importância desses conceitos é salientada por diversos documentos, não só por terem uma relação próxima com muitos outros conceitos matemáticos abordados nas disciplinas de Matemática iniciais desses cursos, mas também por atuarem como ferramenta em diversas disciplinas ao longo do curso (Albuquerque et al., 2006; Bressoud, Mesa & Rasmussen, 2015; Juter, 2006; Rezende, 2003; Tall, Smith & Piez, 2008).

Diversas pesquisas em Educação Matemática têm produzido conhecimento sobre as aprendizagens e dificuldades dos estudantes que ingressam em cursos superiores, nos conceitos de limite e continuidade. Por exemplo, as pesquisas de Celestino (2008), Domingos (2003), Garzella (2013), Gutiérrez-Fallas e Henriques (2017), Juter (2006), Messias e Brandember (2015), Rezende (2003), Slavícková (2013), Tall et al. (2008), apontam que as dificuldades no ensino e aprendizagem desses conceitos residem: na estrutura curricular das disciplinas de Cálculo, no processo de aprendizagem, na 'falta de base' do aluno, no próprio professor da disciplina, ou ainda, na metodologia de ensino. Ademais, há estudos que mostram que as disciplinas de Cálculo apresentam altas taxas de reprovação e/ou abandono (Bressoud et al., 2015; Rezende, 2003).

Segundo Ávila (2002) e Rezende (2003), uma das causas dessa problemática está na estrutura curricular das disciplinas de introdução ao Cálculo, caracterizada por predominância de "pseudo-rigor" no ensino de seus conteúdos, que incluem o limite e a continuidade. Nessa perspetiva, enquanto alguns conceitos são assumidos como resultados de evidências intuitivas, como por exemplo o teorema do valor intermédio, que é introduzido com base na visualização do gráfico de função f contínua num intervalo fechado $[a, b]$ para mostrar que a função assume todos os valores intermediários entre $f(a)$ e $f(b)$, a maioria dos conceitos são definidos e demonstrados com inapropriado nível de rigor, sem que os alunos tenham conhecimento intuitivo e simbólico adequado das bases necessárias para compreendê-los. Isto acontece, por exemplo, na introdução do conceito de limite por meio de sua definição formal em termos de ε e δ, logo no início de sua aprendizagem (Rezende, 2003).

Para Ávila (2002), que apresenta um panorama do ensino de Cálculo e da Análise Matemática nos cursos superiores de ciências exatas das universidades brasileiras até 2002, tentou-se ultrapassar essa dificuldade com uma modificação na estrutura curricular das disciplinas de Cálculo, a partir da década de 60 do último século. Até essa década, as disciplinas de Cálculo nas universidades seguiam o modelo dos famosos "*Cours d'Análise*" das escolas francesas, incorporando, simultaneamente, os atuais conteúdos de Cálculo e de Análise Matemática, e que eram ensinados, predominantemente, seguindo a sequência de definição → teorema → demonstração → corolário (aplicações). A partir de 1960 houve uma reformulação no ensino do Cálculo no Brasil, quando então o Cálculo e a Análise Matemática passaram a constituir disciplinas separadas.

Entretanto, a insistência na apresentação formal dos conceitos de limite e continuidade nas disciplinas iniciais dos cursos superiores persiste até à presente década em diversas universidades brasileiras, contrariando as orientações do Ministério da Educação do Brasil (BRASIL, 2001), tal como atesta o relatório SBEM (2013), produzido conjuntamente pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), o qual constitui um documento que contém reflexões sobre a formação inicial de professores de Matemática no Brasil.

Os estudos de Juter (2006), Palis (2008), Rezende (2003) e Sierpinska (1985; 1987) também indicam que as dificuldades de ensino e aprendizagem de limite e continuidade são resultado do inadequado desenvolvimento de conteúdos matemáticos no ensino básico, inclusive o conceito de função real. Rezende (2003) vai mais além e indica que a razão principal de tais dificuldades, como por exemplo, no cálculo algébrico de limite, na resolução de problemas de aplicação de taxa de variação instantânea de uma função, é oriunda do desvio epistemológico do conceito de função presente no ensino de Matemática desde a Educação Básica. Esses apontamentos, sobre a 'falta de base' do estudante ser um problema à aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade, também são assinalados em relatórios que contemplam o ensino e aprendizagem do Cálculo (Bressoud et al., 2015; CBMS, 2012; SBEM, 2013), os quais indicam que o ensino e aprendizagem do Cálculo deve considerar uma abordagem que resgate os conteúdos matemáticos básicos e necessários à aprendizagem dos seus conceitos e ressalte a característica integradora entre os seus conteúdos.

Apoiados nessa ideia, muitas instituições de ensino superior que oferecem cursos de formação inicial de professores de Matemática, optam por oferecer uma disciplina de introdução ao Cálculo aos seus estudantes iniciantes, como forma de resgatar conhecimentos matemático do Ensino Secundário que são base para a aprendizagem do limite e continuidade (Bressoud et al., 2015; Rezende, 2003). Em muitos casos, esta adoção, na prática, não representa mais que uma ferramenta de transição com base em revisões de conteúdos de álgebra, geometria, trigonometria e funções reais e incentivos à autonomia do estudante. A prática, de criar disciplinas subsidiárias para o ensino e aprendizagem do Cálculo, indica que um problema já atinge dimensões preocupantes e, portanto, algumas ações precisam ser tomadas para reverter esse quadro (Conceição & Sousa, 2014; Rezende, 2003).

Outro aspeto determinante na problemática do ensino e aprendizagem de limite e continuidade consiste na forma predominante de ensinar esses conceitos, com ênfase em exercícios repetitivos para treino e memorização de procedimentos, após aulas expositivas dos conteúdos (CBMS, 2012; Garzella, 2013). Segundo Garzella (2013), o método utilizado no ensino dos conteúdos do Cálculo, predominantemente, centrado na exposição dos conteúdos e sem a interação dos estudantes, onde os conceitos matemáticos são transmitidos como verdades inquestionáveis, sem a preocupação de torná-los significativos para os estudantes, tem sido, frequentemente, motivo de questionamentos dos estudantes sobre a importância desses conteúdos para sua formação e prática. Ademais, essa prática constitui-se numa das causas das altas taxas de reprovação nas disciplinas de introdução ao Cálculo de muitos cursos superiores de formação inicial de professores de Matemática (CBMS, 2012; Garzella, 2013).

Com o avanço das tecnologias digitais[1] e a sua crescente integração no ensino e aprendizagem da Matemática, essa prática tradicional de ensino do Cálculo começou a ruir. Após a conferência de Tulane em 1986, num movimento de reforma do ensino do Cálculo conhecido por *Calculus Reform*, diversas universidades adotaram o uso de tecnologias digitais na disciplina de introdução ao Cálculo, procurando superar os problemas de ensino dos conceitos matemáticos e diminuir os altos índices de reprovação (Schoenfeld, 1995). O *Calculus Reform* recomendava o uso de tecnologias digitais no ensino dos conteúdos do Cálculo, orientado pela denominada '*Regra de três*', em que o ensino desses conteúdos deveria contemplar uma abordagem numérica, geométrica e analítica (Tall, 1993).

Esse movimento, que se iniciou nos Estados Unidos da América, traduziu-se num importante marco no movimento mundial pró utilização do computador no Cálculo, tendo influenciado diversos países que, cada um à sua maneira, começaram a trabalhar para integrar a tecnologia nos seus programas de ensino e aprendizagem (Tall, 1993). Por exemplo, revisões periódicas do currículo educacional, em França, passaram a considerar o uso da tecnologia no ensino dos conteúdos de Matemática, nomeadamente do Cálculo, como preparação para o acesso à Matemática dos cursos universitários. Na Grã-Bretanha, a London Mathematical Society incluiu o Cálculo como parte de sua recomendação a contemplar o uso de computadores no seu ensino em sala de aula (Tall, 1993). Em Portugal, essas propostas contribuíram para reflexões sobre a aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade, nos cursos de formação dos professores de Matemática, estando

[1]O termo tecnologia pode admitir diversos significados. Neste estudo, tecnologia será utilizada para referir às ferramentas computacionais que incluem os *softwares* educacionais, ambientes virtuais, internet, calculadoras gráficas, entre outros.

presentes inclusivamente nas recomendações para esta formação (Albuquerque et al., 2006).

No Brasil, essa tendência do uso de tecnologias digitais no ensino e aprendizagem do Cálculo também se começou a fortalecer após o *Calculus Reform* (Meyer & Júnior, 2002). Algumas investigações, como Barbosa (2009), Celestino (2008), Palis (2008) e Villarreal (1999) e apontam vantagens dessa tendência e indicam que o uso das tecnologias digitais pelos estudantes possibilita o desenvolvimento interativo e dinâmico do seu conhecimento matemático, favorece a criação de conjetura e a sua prova ou refutação, e possibilita a combinação entre diferentes representações (verbal, algébrica, geométrica) dos conceitos matemáticos, e por isso, deve ser estimulada cada vez mais.

Tall et al. (2008) realizam um mapeamento sobre pesquisas e teses de doutorado de diversos países, até 2008, que se debruçaram na investigação dos efeitos do uso de tecnologia digitais, especificamente das calculadoras gráficas e dos *softwares* educacionais, no ensino de conceitos do Cálculo como o limite e continuidade. Este estudo aponta para a existência de evidências de que o uso dessas tecnologias proporciona uma melhor compreensão conceitual dos estudantes e ajuda-os na resolução de problemas, se comparado com os estudantes que tendem a utilizar processos de resolução mais processuais, em aulas tradicionais. Contudo, também revela que a tecnologia usada de forma inadequada geralmente não traz resultado significativo ao ensino desses conceitos, sendo necessário que o seu uso seja feito de maneira planeada e integrada com o currículo e a didática em sala de aula.

Esses fatos evidenciam uma problemática existente atualmente no ensino e aprendizagem do limite e continuidade, incluindo no contexto atual brasileiro. Esses problemas são constatados, inclusive, nos cursos de formação inicial de professores de Matemática, onde se espera que os estudantes adquiram uma maior familiaridade com os conceitos matemáticos para os poderem ensinar (CBMS, 2012; Rezende, 2003; Slavícková, 2013). Por isso, há necessidade urgente de investigação que procure encontrar soluções didáticas, capazes de contribuir para que os futuros professores desenvolvam aprendizagens efetivas desses conceitos, uma vez que o conhecimento desses conceitos tem influência na forma como vão ensinar a Matemática (Albuquerque et al., 2006; SBEM, 2013).

Em particular, têm sido pouco estudados os contextos de ensino e aprendizagem dos conceitos do Cálculo envolvendo uma abordagem de ensino exploratório (Canavarro, 2011) e o uso integrado de tecnologia digitais (Pagani & Allevato, 2014; Tall et al., 2008), o que expõe a existência de carência de investigações nessa temática e contexto. Considero esse tipo de abordagem de ensino fundamental para promover o salto qualitativo que procuro nesta pesquisa, uma vez que tais contextos de ensino e aprendizagem estimulam a autonomia e a participação ativa dos estudantes, podem colaborar na sua formação académica e ressaltar a característica integradora entre os conteúdos do Cálculo (CBMS, 2012; Tall et al., 2008).

1.2. A motivação do estudo

Como professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Campus Nilópolis, tenho identificado problemas semelhantes aos referidos anteriormente, na aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade, após atuar como professor da disciplina de Pré-Cálculo do curso de Licenciatura em Matemática, de 2012 a 2014. Esta disciplina é oferecida pelo IFRJ/Campus Nilópolis aos estudantes do 1º semestre do referido curso e compreende o estudo das funções reais, limite e continuidade de funções. Seu objetivo é estabelecer as bases de Matemática elementar que possibilitam a aprendizagem do Cálculo.

A minha experiência como professor dessa disciplina, mostra que a maioria dos estudantes desenvolve uma inadequada compreensão dos conceitos de limite e continuidade. Os estudantes, verbalizam alguns significados corretos sobre esses conceitos, conseguem aplicar regras e realizar procedimentos simples a eles associados, mas apresentam dificuldades na conexão de suas diferentes representações e, frequentemente, não conseguem aplicar os conhecimentos adquiridos sobre esses conceitos matemáticos na resolução de problemas que os envolve. Como consequência, frequentemente, registram-se altas taxas de evasão e reprovação nessa disciplina.

Essa realidade vivenciada no IFRJ/Campus Nilópolis, tornou ainda mais interessante estudar profundamente sobre a aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade, e levou-me à inquietação na busca por estratégias didáticas que ajudem os estudantes desenvolverem uma compreensão adequada desses conceitos matemáticos, que lhes possibilitem atribuir significados corretos desses conceitos e apropriados à situação, interpretar e representá-los corretamente em suas diferentes representações, movendo-se de forma flexível entre elas, e resolver problemas que os envolvam.

De um modo particular, desde 2010, tenho investigado a inserção do *software* educacional, especialmente o GeoGebra, na aprendizagem de funções, cujos principais resultados estão publicados em (Fonseca, 2011; Fonseca, Silva, Santos, Santiago & Marçal, 2013; Fonseca, Silva, Cassiano & Gaspar, 2015). Essas investigações seguiram uma abordagem de ensino exploratório, o qual constitui uma prática de ensino com ênfase na realização de tarefas exploratórias que visam promover, nos estudantes, a descoberta e a construção do conhecimento, cabendo ao professor apoiá-los e desafiá-los no processo de exploração, de forma que alcancem os objetivos de aprendizagem propostos (Canavarro, 2011). A escolha do GeoGebra justifica-se por ser um *software* de aquisição e uso gratuito, por meio de *downloads* na internet e pelas potencialidades reconhecidas no ensino e aprendizagem da Matemática (Leung, 2017).

Os resultados obtidos nessas investigações indicam que o uso do GeoGebra no ensino de funções, quando bem planeado e executado, proporciona resultados muito satisfatórios, seja ao nível das aprendizagens de funções ou do desenvolvimento das capacidades de argumentação, explicação e justificação dos estudantes. No que respeita às contribuições desse *software* para as aprendizagens de funções, há evidencias de ter: (i) proporcionado o interesse dos alunos pelo estudo das funções; (ii) ajudado a dar sentido ao que é estudado, estimulando a aprendizagem; (iii) proporcionado a conexão entre ideias matemáticas trabalhadas nas aulas de Matemática; e (iv) aberto caminhos para novas aprendizagens. Esses resultados indicam que essa prática de ensino precisa ser incentivada e aperfeiçoada cada vez mais (Fonseca et al., 2015).

Embora estas investigações tenham sido realizadas com alunos do Ensino Secundário e sobre o conceito de funções reais, os seus resultados positivos dão indicações de que o ensino exploratório com recurso ao GeoGebra é uma prática que pode ser estendida ao ensino e aprendizagem de outros conceitos matemáticos e/ou a outros níveis de ensino. Reconhecendo a necessidade de se encontrar soluções didáticas que possibilitem aos estudantes de Pré-Cálculo do curso de Licenciatura em Matemática do IFRJ/Campus Nilópolis desenvolverem a compreensão dos conceitos de limite e continuidade, permitindo-lhes alcançar uma aprendizagem mais efetiva desses conceitos e superar possíveis dificuldades, considero pertinente desenvolver um estudo em que o ensino desses conceitos matemáticos seja conduzido por uma abordagem de ensino exploratório com o recurso integrado ao GeoGebra. Desta forma, a lecionação desses conceitos matemáticos seguindo essa abordagem de ensino, embora constitua um novo desafio para mim, enquanto docente do nível superior, poderá ser um contributo para a melhoria das minhas práticas e, consequentemente, para o meu desenvolvimento profissional, o que será motivo de reflexão no final do estudo.

1.3. A relevância e pertinência do estudo

Os conceitos de limite e continuidade são frequentemente introduzidos nas disciplinas iniciais de muitos cursos superiores, incluindo a formação inicial de professores de Matemática, sendo parte do conhecimento matemático básico que os futuros professores devem adquirir para ensinar Matemática (Albuquerque et al., 2006; CBMS, 2012; SBEM, 2013). A aprendizagem desses conceitos, com compreensão, é necessária para que os estudantes avancem, no seu percurso escolar, para uma aprendizagem mais formal e rigorosa do Cálculo (Cottrill, Nichols, Schwingendorf, Thomas & Vidakovic, 1996; Sealey, Deshler & Hazen, 2014), sendo este um desafio para os professores quando lecionam esses conceitos.

A importância de uma aprendizagem da Matemática, com compreensão, tem ganho atenção e consenso crescente em resultados de investigações em Educação Matemática (Carpenter & Lehrer, 1999; Domingos, 2001; Hiebert & Carpenter, 1992), sendo também enfatizada em orientações curriculares para a formação inicial de professores de Matemática (Albuquerque et al., 2006; CBMS, 2012). Estes estudos indicam que os estudantes devem desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos enquanto aprendem, contrapondo-se à aprendizagem que assenta na aquisição de habilidades isoladas, onde só posteriormente é desenvolvida compreensão de como estas habilidades estão associadas ao conceito aprendido (Domingos, 2001). Desta forma, a *compreensão* torna-se o foco do processo de aprendizagem e, por isso, ela é considerada como um pilar fundamental nesse processo (Domingos, 2003).

Para Skemp (1976), a compreensão de um conceito matemático pode ser *Instrumental*, envolvendo o conhecimento memorizado de regras que permitem usá-las para resolver certos problema, ou *Relacional*, que consiste na conceção de uma estrutura conceitual rica e integrada, que permite relacionar os significados, procedimentos, regras e representações, possibilitando a sua mobilização para comunicar e resolver problemas.

É esta estrutura conceitual que torna viável uma aprendizagem com compreensão e, por isso, pesquisas mais recentes sobre a aprendizagem do limite e continuidade têm indicado que os significados atribuídos a estes conceitos, o uso de suas representações e a resolução de problemas que os envolve, constituem elementos que apoiam a investigação sobre a sua compreensão pelos estudantes (Domingos, 2003; Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo & Rico, 2013; Juter, 2006; Karatas, Guven & Cekmez, 2011; Tall & Vinner, 1981).

Em particular, o ensino de conceitos matemáticos com recurso a tarefas exploratórias integrando o uso de s*oftware* GeoGebra, tem recebido bastante atenção nas pesquisas em Educação Matemática, seja pelas vantagens em viabilizar um ambiente de aprendizagem rico e eficaz que não é possível num contexto de papel e lápis, em que as estratégias didáticas permitem aos estudantes alcançarem aprendizagens mais efetivas (Leung, 2017). Reconhecendo os contributos do GeoGebra para a aprendizagem e compreensão dos conceitos matemáticos, alguns pesquisadores têm vindo a considerá-lo como recurso no ensino e aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade de funções, confirmando algumas potencialidades no seu uso (Aydos, 2015; Dikovic, 2009; Slavícková, 2013). Esses estudos têm-se focado maioritariamente na compreensão informal do limite e continuidade de funções, sobretudo no que respeita às conceções erróneas mais comuns dos estudantes e futuros professores de Matemática, e em abordagens didáticas desses conceitos. Todavia há poucas evidências empíricas sobre o modo como a compreensão do limite e continuidade, que considere, simultaneamente, a formação de significados corretos desses conceitos, o estabelecimento de conexões entre suas diferentes representações e a resolução de problemas que os envolvem, emerge e se desenvolve ao longo do processo de aprendizagem, e o papel do GeoGebra para essa compreensão (Karatas et al., 2011; Pagani, & Allevato, 2014; Tall et al., 2008).

Desta forma, há carência de investigações conduzidas em contextos de ensino exploratório integrando o GeoGebra, que tenham em conta o desenvolvimento da compreensão assente nessas três dimensões, e que procure entender o papel do GeoGebra para essa compreensão, sendo pertinente perceber se esse é um contexto que promova a aprendizagem dos conceitos do Cálculo, particularmente dos conceitos de limite e continuidade de funções. Assim, é justamente na necessidade de se aprofundar a investigação sobre a eficácia de atividades desenhadas para ajudar os estudantes a desenvolverem compreensões mais robustas de conceitos do Cálculo, e de contribuir para que os estudantes ultrapassem possíveis dificuldades na sua aprendizagem, que se encontra a relevância deste estudo.

1.4. Objetivos e questões do estudo

Portanto, reconhecendo a importância de uma aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade, com compreensão, que se pode desenvolver atendendo a três dimensões, nomeadamente, os significados dos conceitos, o uso de suas diferentes representações e a resolução de problemas que os envolve, e assumindo que ensino desses conceitos numa abordagem exploratória que considere o uso do GeoGebra, quando bem planeado e executado, proporciona ao estudante alcançar aprendizagens mais efetivas, é pertinente investigar com maior profundidade se as três dimensões, simultaneamente, se revelam úteis para desenvolver a compreensão dos estudantes sobre esses conceitos e compreender, com mais detalhe, o papel do GeoGebra para essa compreensão.

Desta forma, tendo como alvo os estudantes que frequentam a disciplina de Pré-Cálculo, do 1.º ano de um curso de formação inicial de professores de Matemática do Ensino Fundamental II (6º ao 9º ano) e Ensino Médio (1º ao 3º ano), no Brasil, o objetivo deste estudo é analisar que compreensão evidenciam os estudantes no processo de aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade de funções, no contexto de uma experiência de ensino de cunho exploratório, integrando o uso do GeoGebra. Para além disso, procuro perceber o contributo do GeoGebra para essa compreensão. Tendo em conta esses objetivos, procuro responder às seguintes questões de investigação:

1. Quais os significados que os estudantes atribuem aos conceitos de limite e continuidade de funções, ao longo da experiência de ensino?

2. Como é que os estudantes reconhecem, representam e transformam os conceitos de limite e continuidade em diferentes representações, ao longo da experiência de ensino?

3. Que conhecimentos sobre os conceitos de limite e continuidade os estudantes mobilizam na resolução de problemas que envolvem estes conceitos, propostos no decorrer da experiência de ensino?

4. Qual o papel do GeoGebra na compreensão dos conceitos de limite e continuidade, nomeadamente, na construção de significados e no trabalho com diferentes representações destes conceitos para resolver problemas que os envolvem?

1.5. Organização do estudo

O presente estudo está estruturado em nove capítulos, sendo este, o primeiro, destinado à introdução, onde apresento os motivos pessoais para a escolha do tema e o contexto do estudo, a sua relevância e os objetivos e questões que o orientam.

No capítulo 2, apresento uma revisão da literatura sobre o conhecimento profissional do professor de Matemática, com destaque para o conhecimento matemático para ensinar e o seu desenvolvimento na formação inicial de professores. Sistematizo algumas recomendações gerais sobre esta formação e apresento um breve panorama dessa formação no Brasil, com vista a situar o contexto desta investigação. No capítulo 3, discuto o ensino e aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade e, faço uma revisão de literatura sobre as dificuldades dos estudantes e as potencialidades e limitações do uso do GeoGebra na aprendizagem desses conceitos matemáticos.

No capítulo 4, discuto sobre a compreensão dos conceitos de limite e continuidade assente em três dimensões, nomeadamente, os significados atribuídos aos conceitos que revelam conceção sobre ele, o uso de suas diferentes representações e a resolução de problemas que os envolve. Procuro, assim, descrever o suporte teórico para o quadro de análise de dados do estudo.

No capítulo 5 apresento a metodologia do estudo, que contemplam as opções metodológicas, uma caracterização geral dos participantes, o papel do pesquisador, os processos de recolha e análise de dados e aspetos relacionados às questões éticas. Depois, no capítulo 6, apresento aspetos relacionados à experiência de ensino que suporta o estudo, no qual descrevo o contexto geral onde se realizou a experiência de ensino, a sua preparação e planeamento e outros aspetos gerais da sua realização.

Nos capítulos 7, e 8 apresento os principais resultados do estudo, centrando-os na compreensão dos conceitos de limite (capítulo 7) e continuidade (capítulo 8) e no papel do GeoGebra para a compreensão desses conceitos. Esses capítulos estão organizados pelas três dimensões da compreensão, nomeadamente, os significados, as representações e a resolução de problemas. Cada um contempla ainda a análise sobre o papel do GeoGebra para cada uma dessas dimensões.

No capítulo 9, apresento a análise das opiniões dos estudantes sobre as tarefas exploratórias, o uso do GeoGebra e método de ensino exploratório da experiência de ensino. Estas opiniões são fundamentais para uma reflexão sobre a experiência de ensino, de forma a verificar possíveis contributos que ajudem no planeamento e realização de nova experiência de ensino com êxito.

Finalmente, no capítulo 10, apresento as conclusões e reflexão final do estudo. Apresento as principais conclusões do estudo dando resposta às questões de investigação e termino com uma reflexão sobre o trabalho realizado e possíveis implicações para a realização de nova investigação neste domínio.

Capítulo 2

O conhecimento do professor de Matemática na formação inicial de professores

Neste segundo capítulo começo por apresentar algumas considerações sobre o conhecimento do professor de Matemática, com destaque para o conhecimento matemático para ensinar, a desenvolver durante a formação inicial de professores. Depois apresento uma revisão da literatura sobre a formação inicial de professores de Matemática, abordando algumas recomendações gerais sobre essa formação, a fim de justificar e fundamentar as estratégias propostas. Por fim, visando situar o contexto do desenvolvimento deste estudo, apresento um breve panorama dessa formação no Brasil.

2.1. O conhecimento do professor para ensinar Matemática

2.1.1. Modelos do conhecimento do professor

Uma questão que tem motivado investigações nas últimas décadas refere-se ao conhecimento necessário ao professor para ensinar (e.g. Ball, Thames & Phelps, 2008; Mishra & Koehler, 2006; Ponte & Chapman, 2008; 2016; Shulman, 1986; 1987). Alguns pesquisadores da Educação Matemática que se têm debruçado sobre essa questão, usam o termo *conhecimento profissional* do professor para referir, em linhas gerais, o conhecimento e competências profissionais que habilitam o professor para o ensino da Matemática aos estudantes (Ponte, 2012; Serrazina, 2014). Segundo Ponte (2012), este conhecimento apoia-se em diversos domínios:

> O conhecimento profissional do professor é, assim, acima de tudo, orientado para uma atividade prática (ensinar Matemática a grupos de estudantes), embora se apoie em conhecimentos de natureza teórica (sobre a Matemática, a educação em geral e o ensino da Matemática, entre outros) e no conhecimento de natureza social e experiencial (sobre os estudantes, a dinâmica da aula, os valores e a cultura da comunidade

> envolvente, ou sobre a comunidade escolar e profissional, entre outros) (p. 86).

As primeiras pesquisas que buscam compreender qual a origem do conhecimento dos professores, como esses conhecimentos são adquiridos e como os novos conhecimentos se combinam com os prévios, no intuito de caracterizar o *conhecimento profissional* do professor, surgiram na década de 80 nos Estados Unidos, num contexto de reformas educacionais, tendo como pioneiro os trabalhos de Shulman (1986, 1987).

Shulman (1986) identifica três aspetos do conhecimento do professor necessário ao ensino, nomeadamente, (i) *conhecimento do conteúdo*; (ii) *conhecimento pedagógico do conteúdo* e (iii) *conhecimento do currículo*. O *conhecimento do conteúdo* refere-se ao saber dos professores, especificamente, sobre os temas e conceitos dos conteúdos que irá ensinar. Inclui tanto a compreensão dos factos, conceitos, processos e procedimentos, relativos aos conteúdos de uma área específica de conhecimento. O *conhecimento pedagógico do conteúdo* refere-se ao conhecimento de como os conteúdos devem ser ensinados. Inclui os modos de apresentar e abordar o conteúdo, a fim de ser compreendido pelos alunos. Está relacionado à capacidade que o professor tem de preparar as suas aulas, propor e organizar as situações de aprendizagem, transformando o seu conhecimento do conteúdo em formas de ensino para os alunos e saber fazer possíveis adaptações em diferentes situações em função das necessidades de aprendizagem dos alunos. Por fim, o *conhecimento do currículo* consiste no conhecimento crítico dos diferentes programas para o ensino, na diversidade de recursos didáticos, incluindo os tecnológicos, que podem ser utilizados como apoio ao ensino e aprendizagem. Para além disso, deve incluir o conhecimento das relações e integração, quando necessário, entre diversos conteúdos dentro da mesma área de conhecimento ou entre outras áreas de conhecimento, abordados ou não anteriormente.

Shuman (1987) reformula o seu modelo anterior e apresenta sete categorias como base do conhecimento do professor, nomeadamente: (i) *conhecimento do conteúdo*; (ii) *conhecimento pedagógico geral*, que envolve os princípios ou estratégias de gestão e organização de sala de aula, úteis para ensinar o conteúdo; (iii) *conhecimento do currículo*, que corresponde ao conhecimento do professor para selecionar e organizar os programas; (iv) *conhecimento pedagógico do conteúdo*, que é uma “amálgama” ou combinação especial entre conteúdo e pedagogia, específico do professor; (v) *conhecimento dos alunos e de suas características*; (vi) *conhecimento dos contextos educacionais*, que contempla a compreensão das características do ambiente de trabalho, dos grupos culturais, da comunidade; e (vii) *conhecimento dos objetivos educacionais*, que compreende os valores sociais, propósitos e bases filosóficas e históricas.

A partir das ideias propostas por Shulman (1986, 1987), inúmeras pesquisas foram desenvolvidas na Educação Matemática procurando identificar e compreender o *conhecimento profissional* do professor, dando abertura a novas tipologias ou classificações desse conhecimento. Destaca-se os trabalhos de Débora Ball e seus colaboradores (Ball, Hill & Bass, 2005; Ball et al., 2008; Hill & Ball, 2009), que após sistematizarem diversos resultados de suas pesquisas, tomando como referencial teórico as ideias proposta por Sulman (1986, 1987), propõem um novo modelo para o conhecimento do professor necessário ao ensino da Matemática (figura 2.1), dividindo-o em duas categorias principais: *conhecimento do conteúdo* e *conhecimento pedagógico do conteúdo*.

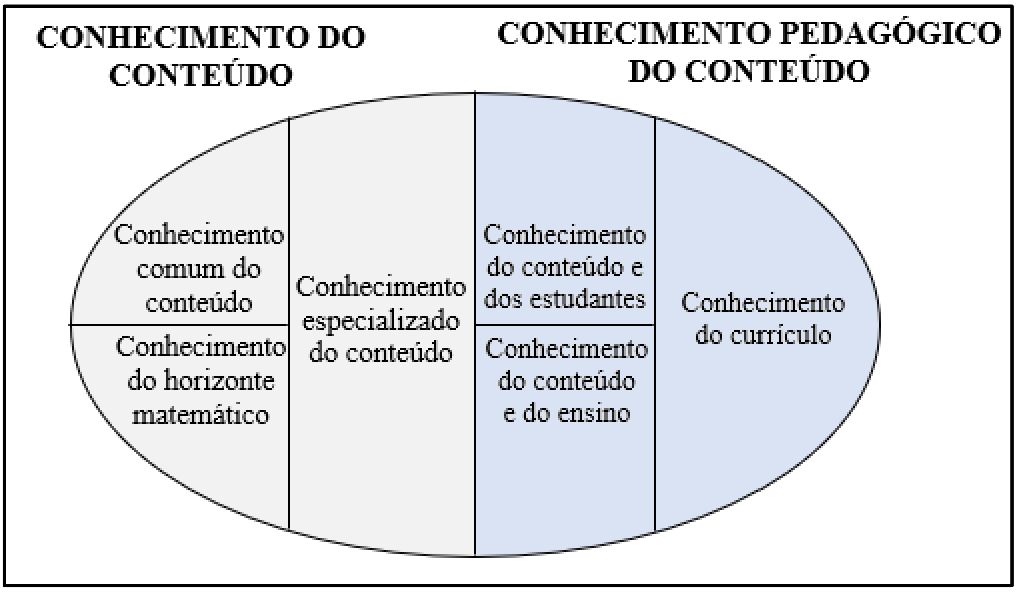


Figura 2.1: Domínios do conhecimento matemático para o ensino
(Ball et al., 2008; Hill & Ball, 2009)

Para estes autores, o *conhecimento do conteúdo* é subcategorizado em termos de três tipos de conhecimento: (i) *conhecimento comum do conteúdo*, que se constitui no conhecimento da Matemática que qualquer pessoa bem instruída matematicamente tem, na perspetiva de saber usá-lo como ferramenta no dia a dia. Este conhecimento inclui, por exemplo, o conhecimento de reconhecer respostas erradas dos alunos, definições imprecisas nos livros didáticos e o uso de notações corretas ao propor uma tarefa aos alunos (Hill & Ball, 2009); (ii) *conhecimento especializado do conteúdo*, que representa um conhecimento da Matemática para além do que se espera numa pessoa bem instruída matematicamente. É específico e único do professor na sua prática em sala de aula. Este conhecimento inclui saber analisar os erros cometidos pelos alunos identificando a sua natureza, avaliar ideias alternativas na resolução de problemas, ter presente em cada momento os significados e fundamentos dos conteúdos que estão sendo ensinados (Hill & Ball, 2009); e (iii) *conhecimento do horizonte matemático*, que consiste num conhecimento do conteúdo que possibilita ao professor ter uma visão geral, sobre a forma como os temas matemáticos se relacionam dentro do currículo da matemática e saber em que momento um tema deve ser abordado, pela primeira vez e ao longo do ensino (Ball et al., 2008).

O *conhecimento pedagógico do conteúdo* também é descrito por estes autores em três categorias, nomeadamente, (i) *conhecimento do conteúdo e dos alunos*, que representa o conhecimento do conteúdo interligado com o conhecimento de como os alunos pensam, compreendem ou aprendem sobre determinado conteúdo. Está relacionado à necessidade de antecipar as dificuldades que os alunos podem ter e quais as razões para isso. Este conhecimento inclui ser capaz de antecipar aos erros comuns que os alunos cometem e interpretar porque os cometem (Ball et al., 2008); (ii) *conhecimento do conteúdo e do ensino*, caracterizado pelo conhecimento sobre como construir e desenvolver uma abordagem de ensino visando a aprendizagem dos alunos. Este conhecimento abrange, por exemplo, saber a maneira ideal de sequenciar o ensino dos conteúdos aos alunos, de modo a superar as suas possíveis dificuldades de aprendizagem ou a explorar alguns aspetos específicos desse conteúdo (Ball et al., 2008); e (iii) *conhecimento do currículo*, que consiste numa compreensão adequada da diversidade de materiais educacionais disponíveis para o ensino dos conteúdos em diferentes níveis, como recursos didáticos, incluindo ferramentas computacionais. Este conhecimento engloba saber as vantagens e desvantagens de usar os diversos recursos materiais e didáticos em diferentes circunstâncias (Ball et al., 2008; Hill & Ball, 2009), correspondendo integralmente com o que é indicado em Shulman (1986).

Com o surgimento e desenvolvimento das tecnologias digitais e o seu crescente uso no processo de ensino e aprendizagem em sala de aula, impulsionado pelas vantagens de viabilizar ambientes de aprendizagens dinâmicos e interativos, impossíveis de serem contemplados num ambiente que recorre ao caderno, livro e quadro negro (Leung, 2017; NCTM, 2014), tornou-se fundamental considerar como parte do conhecimento profissional do professor o conhecimento tecnológico, que envolve o conhecimento sobre a integração das tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática (Mishra & Koehler, 2006).

Inspirados nas ideias de Shulman (1986), Mishra e Koehler (2006) apresentam um modelo para o *conhecimento profissional* do professor, formado por sete tipos de conhecimentos e que surgem a partir da articulação e interseção dos conhecimentos do conteúdo, pedagógico e tecnológico, a saber: *conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico, conhecimento tecnológico, conhecimento pedagógico do conteúdo, conhecimento tecnológico e pedagógico*, *conhecimento tecnológico do conteúdo e o conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo* (figura 2.2).

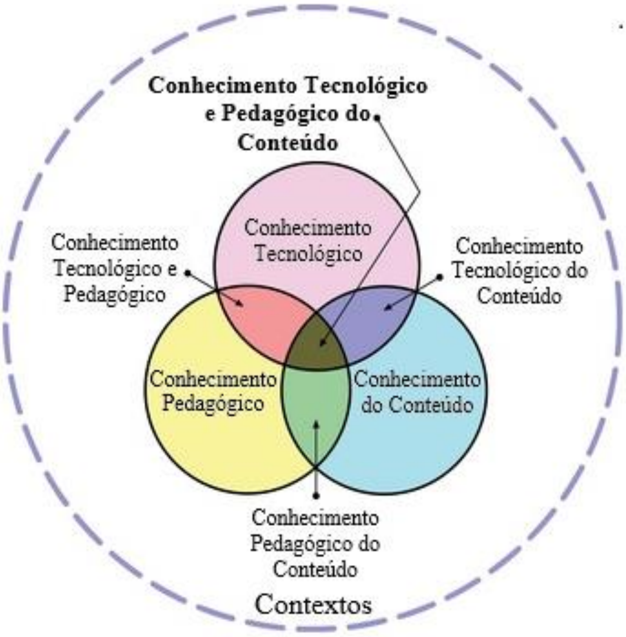


Figura 2.2: Domínios do conhecimento do professor (Mishra & Koehler, 2006)

De acordo com Mishra e Koehler (2006), os *conhecimentos do conteúdo*, *pedagógico* e *pedagógico do conteúdo*, correspondem às mesmas classificações do modelo de Shulman (1986), cujas descrições foram apresentadas anteriormente. O *conhecimento tecnológico* corresponde ao conhecimento sobre as tecnologias digitais (*software*, *internet*, vídeos digitais, calculadoras gráficas, entre outras) e não digitais (livros didáticos, quadro branco, entre outras), e inclui as habilidades de operar tecnologia específicas e aprender e adaptar-se às novas tecnologias. O *conhecimento tecnológico do conteúdo* corresponde ao conhecimento do impacto da integração da tecnologia ao planear o ensino de um conteúdo. Segundo Mishra e Koehler (2006), os professores precisam conhecer não apenas o conteúdo que ensinam, mas também a forma como este pode ser transformado com a integração à tecnologia. O *conhecimento tecnológico e pedagógico*, compreende o conhecimento das potencialidades e limitações de uma tecnologia e como esta pode ser usada como estratégia de ensino e aprendizagem. Este conhecimento associado ao professor inclui, por exemplo, ser capaz de desenvolver estratégias de ensino e aprendizagem de um conteúdo com a integração de uma tecnologia adequada.

Em sequência, Mishra e Koehler (2006) definem o *conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo* (TPACK – Technological Pedagogical Content Knowledge) como a intersecção dos conhecimentos do *conteúdo*, *pedagógico* e *tecnológico*, e que consiste no conhecimento necessário ao professor para ensinar os conteúdos de sua área disciplinar, com a integração de tecnologia. Segundo estes autores, o TPACK envolve:

> uma compreensão da representação de conceitos usando tecnologias; técnicas pedagógicas que usam tecnologias de maneiras construtivas para ensinar conteúdo; conhecimento do que torna os conceitos difíceis ou fáceis de aprender e como a tecnologia pode ajudar a corrigir alguns dos problemas que os alunos enfrentam; conhecimento dos conhecimentos prévio dos alunos e teorias da epistemologia; e conhecimento de como as tecnologias podem ser usadas para construir o conhecimento existente e desenvolver novas epistemologias ou fortalecer as antigas (Mishra & Koehler, 2006, p. 1029).

Os diferentes modelos de conhecimentos do professor apresentados anteriormente dão uma ideia da diversidade de abordagem e o ecletismo presentes nas pesquisas sobre o conhecimento profissional do professor, e contribuem para caracterizar este conhecimento em seus diversos domínios. Entretanto, a articulação e integração desses modelos de conhecimentos são fundamentais para o desenvolvimento adequado do *conhecimento profissional* do professor, devendo a articulação destes ser orientada para a prática profissional (Ponte, 2012).

Por isso, alguns autores têm situado o *conhecimento profissional* do professor para o ensino de Matemática, como algo importante a ser considerado desde a sua formação inicial (Albuquerque et al., 2006; Branco, 2013; Ponte, 2012; Ponte & Chapman, 2016; Serrazina, 2014). Estes autores indicam que diversos tipos de conhecimentos, nomeadamente, relativos aos conteúdos matemáticos, à natureza da Matemática, ao currículo, à forma de apresentar as ideias de modo a que sejam aprendidas pelos futuros professores, à forma como os alunos compreendem e aprendem os conteúdos matemáticos e à gestão da sala de aula, não só fazem parte do *conhecimento profissional* do professor e são necessário à sua prática em sala de aula, como também, precisam ser contemplados ao longo da formação inicial, a partir de processos reflexivos. É na formação inicial que o futuro professor deve adquirir diferentes tipos de conhecimentos e saber articulá-los, de modo a melhor prepará-lo para futura prática docente (Branco, 2013; Ponte, 2012).

2.1.2. O conhecimento matemático para ensinar

O *conhecimento profissional* do professor de Matemática, como descrito nos modelos apresentados, contempla diversas dimensões das quais interessa-me, neste estudo, a que se refere ao conhecimento dos conteúdos matemáticos, e que é designado por *conhecimento matemático* (CBMS, 2012; Ponte & Chapman, 2008; Serrazina, 2014). O *conhecimento matemático* inclui a compreensão dos conceitos, dos factos e dos procedimentos bem como as relações destes dentro da Matemática; da forma como as ideias matemáticas podem ser representadas e da Matemática enquanto ciência (Albuquerque et al., 2006; Serrazina, 2014). Este conhecimento, associado ao professor, envolve ser capaz de compreender os significados e procedimentos matemáticos, realizar justificações e refutações em provas matemáticas, dar sentido a métodos e soluções diferentes do convencional, valorizando a adequação e comparação entre diferentes métodos (Albuquerque et al., 2006; Ball et al., 2005; Ponte & Chapman, 2016).

O *conhecimento matemático* do professor de Matemática possui algumas particularidades específicas da sua área de atuação, sendo nesse caso, diferente do que é exigido de outros profissionais (Albuquerque et al., 2006). Enquanto o domínio dos processos e procedimentos dos conteúdos matemáticos, como cálculos matemáticos, aplicação de propriedades matemáticas, justificações de algoritmos algébricos ou numéricos, entre outros, são fundamentais, por exemplo, para o engenheiro, arquiteto ou estatístico no desenvolvimento de sua profissão, os professores precisam possuir conhecimento mais completo da Matemática. Isto inclui tanto o conhecimento dos processos e procedimentos matemáticos, quanto a compreensão das suas bases, de modo a ensiná-los aos alunos, independentemente do nível de ensino em que atuarão (Albuquerque et al., 2006; CBMS, 2012).

Alguns autores apontam a importância da compreensão conceitual dos conteúdos matemáticos para o desenvolvimento do *conhecimento matemático* do professor, devendo este desenvolvimento ser considerado desde a formação inicial (Albuquerque et al., 2006; Ponte & Chapman, 2008; Serrazina, 2014; Skemp, 1976). Para estes autores, a compreensão conceitual é entendida como uma estrutura rica e integrada de conhecimentos associados aos conceitos, que permite relacionar significados, representações, operações e conceitos, e saber usá-los de forma significativa e flexível para resolver problemas, constituindo-se numa atividade mental que se desenvolve continuamente e não como uma estrutura estática da aprendizagem (NCTM, 2000; 2014). Este tipo de compreensão difere da compreensão instrumental (Skemp, 1976), onde quem evidencia possuí-la consegue apenas aplicar algumas regras memorizadas e realizar procedimentos simples para resolver certos problemas de aplicação de métodos conhecidos.

A compreensão conceitual da Matemática é fundamental para que os professores possam ensinar a Matemática como uma atividade fundamentada, coerente e torná-la flexível e adequada aos alunos (NCTM, 2014; Ponte, 2014). Associada ao professor, ela permite-lhe, por exemplo: recordar regras e procedimentos matemáticos com mais facilidade; avaliar ideias alternativas na resolução de problemas; reconhecer quando um procedimento pode levar à resolução correta ou falsa de um problema; esclarecer dúvidas aos alunos recorrendo a diferentes representações, procedimentos ou abordagens dos conceitos matemáticos, quando necessário; e reconhecer e analisar os erros cometidos pelos alunos na resolução de uma tarefa justificando a natureza dos erros (CBMS, 2012; Ponte & Chapman, 2016; SBEM, 2013).

Por isso, é fundamental que o professor de Matemática desenvolva, desde a sua formação inicial, uma compreensão conceitual da Matemática que vai ensinar. Isto inclui possuir um nível adequado de conhecimento de relações, procedimentos, significados e diferentes representações dos conceitos matemáticos que vai ensinar, sendo capaz de correlacioná-los entre si, e, saiba os porquês do uso destes na resolução de problemas. Para além disso, tenha presente em cada momento do processo de ensino, os significados e os fundamentos dos conhecimentos mobilizados, revelando um adequado *conhecimento matemático* com vista ao ensino da Matemática (Albuquerque et al., 2006; CBMS, 2012).

O desenvolvimento do *conhecimento matemático* do professor também ocorre por meio de experiência que contemple a integração entre o conteúdo e pedagogia, a ser considerada na formação inicial de professores de Matemática (Albuquerque et al., 2006; CBMS, 2012; Ponte & Chapman, 2008). Essa integração envolve o estudo da Matemática para além do que é necessário ao ensino e o estabelecimento claro das suas relações com a Matemática que se vai ensinar, a partir de experiências de aprendizagem que revelem aspetos didáticos mais próximos da prática de sala de aula, como por exemplo, experimentações, generalizações, provas e refutações, modelações, investigações matemáticas, entre outros (Branco, 2013; Ponte e Chapman, 2008).

No âmbito desta formação, a integração entre conteúdo e pedagogia é fundamental à promoção do conhecimento matemático do futuro professor (Branco & Ponte, 2014; Ponte & Chapman, 2008). Segundo Branco e Ponte (2014), esta integração permite a construção de processos de aprendizagem e de abordagem de ensino, potencialmente ricos, que favorece a "compreensão de conceitos, procedimentos, representações e conexões no âmbito da análise de situações de aula, das estratégias e dificuldades dos estudantes e de tarefas para os alunos" (p. 381). Por isso, é na formação inicial que começa a ser desenvolvido o *conhecimento matemático*.

Entre os diversos modelos do *conhecimento profissional* do professor de Matemática, nesse estudo focarei no *conhecimento matemático* dos conceitos de limite e continuidade de funções. O conhecimento aprofundado destes conceitos é fundamental ao futuro professor tanto para prosseguir o percurso de sua formação quanto para ensinar Matemática na Educação Básica, nomeadamente, conteúdos associados às funções reais, sequências e séries matemáticas, entre outros, na sua prática profissional (Albuquerque et al., 2006; CBMS, 2012; SBEM, 2013). A descrição de aspetos que compõem um conhecimento adequado desses conceitos matemáticos e indicações de como promover a sua aprendizagem e compreensão conceitual estão apresentadas no capítulo 3.

2.2. A formação inicial de professores e o desenvolvimento do conhecimento matemático para ensinar

O curso de formação inicial de professores de Matemática tem uma grande responsabilidade na preparação destes profissionais para a prática docente. Este curso tem como finalidade principal preparar o futuro professor para atuar no ensino de Matemática, proporcionando uma sólida formação científica e didática na área da Matemática, para além de uma formação humana e cultural (Albuquerque et al, 2006). Para além disso, é a formação inicial que procura fornecer as condições para que o futuro professor de Matemática desenvolva competências para o ensino, pesquisa e extensão em Matemática, tornando-o um profissional com condições de seguir estudos na pós-graduação em Educação Matemática, Matemática Pura, Matemática Aplicada e áreas afins à Matemática (CBMS, 2012; SBEM, 2013).

Em inúmeros países essa formação é oferecida num curso de nível superior. Em Portugal, para ser professor de Matemática do 3º ciclo do ensino básico (7º - 9º ano) e Ensino Secundário (10º - 12º ano), além do curso de Licenciatura em Matemática, o futuro professor precisa concluir o mestrado em Ensino numa instituição de Ensino Superior (Oliveira & Cyrino, 2011). No Brasil, essa formação acontece nos cursos de Licenciatura em Matemática, como apresentarei na secção 2.3 deste capítulo.

Nas últimas décadas a formação inicial dos professores de Matemática da Educação Básica tem merecido bastante destaque nas pesquisas em Educação Matemática (Ball et al., 2008; Fiorentini et al., 2002; Ponte et al., 2000; Ponte & Chapman, 2008; Shulman, 1986), por dois motivos principais:

O primeiro motivo deve-se ao professor ser considerado o agente chave do ensino da Matemática (Ponte, 2014; Serrazina, 2014). No ensino da Matemática, o professor é responsável por orientar e estimular os alunos a construírem e aperfeiçoarem os seus conhecimentos sobre os conteúdos de Matemática escolar, ajudando-os a compreender, explicar ou organizar esses conhecimentos, proporcionando assim o que se entende ser um ensino de Matemática de qualidade, e contribuindo para a formação básica do aluno (Ponte, 2014; SBEM, 2013). Ademais, o professor tem uma contribuição importante na preparação do seu aluno para a sua futura inserção no mundo do trabalho, nas relações sociais e na cultura, no âmbito da sociedade (Fiorentini et al., 2002; SBEM, 2013).

Na procura por um ensino de Matemática de qualidade é fundamental que o professor tenha uma formação adequada e aprofundada da Matemática que vai ensinar, e seja preparado para utilizar a linguagem matemática necessária para entender as suas aplicações dentro e fora da Matemática (Ponte & Chapman, 2008). Essa formação adequada, entre outros fatores, precisa ser baseada na integração e articulação entre a teoria e a prática, entre os diversos tipos de conhecimento que compõem o *conhecimento profissional* do professor sobre a Matemática e o seu ensino, o qual influencia e determina o modo como o professor ensina e como encara a aprendizagem da Matemática (Ponte, 2012; Ponte & Chapman, 2008). Deste modo, não é possível alcançar um ensino de Matemática de qualidade sem cuidar da formação daqueles que são de fundamental importância no processo de ensino e aprendizagem na escola, isto é, o professor.

O segundo motivo pelo qual a formação inicial de professores tem merecido destaque nas pesquisas em Educação, deve-se ao fato dela apresentar indícios de diversos problemas (CBMS, 2012; SBEM, 2013). Isto inclui, problemas no seu currículo (CBMS, 2012), alto índice de reprovação nas suas disciplinas iniciais (Garzella, 2013; Rezende, 2003), inadequada formação didática dos seus intervenientes (Ponte & Chapman, 2008; 2015), entre outros. Esses problemas têm levado diversos países, a partir do trabalho colaborativo de diversas associações profissionais e científicas ligadas à Educação Matemática, a proporem recomendações para a formação inicial de professores de Matemática, com vista a superá-los (Albuquerque et al., 2006; CBMS, 2012; SBEM, 2013).

Uma recomendação contida nesses documentos orientadores diz que a formação inicial deve promover no futuro professor uma compreensão aprofundada da Matemática que vai ensinar. Enquanto quem utiliza a Matemática como ferramenta de trabalho no seu dia a dia, em geral, não questiona o porquê ser feito dessa ou daquela maneira, o saber do professor que ensina a Matemática deve contemplar a Matemática como um todo, que inclui uma visão integrada dos porquês e fundamentos dos seus conteúdos, em diferentes contextos matemáticos e quando possível recorrendo a diferentes enfoques ou abordagens. Por isso, os cursos de formação inicial devem proporcionar aos futuros professores momentos para trabalharem a Matemática, de forma aprofundada, a fim de melhor prepará-los para o ensino aos seus alunos (Albuquerque et al., 2006; CBMS, 2012; Ponte & Chapman, 2008).

Como o conhecimento dos conteúdos matemáticos não é formado por uma lista sequencial de tópicos totalmente desarticulados e desconexos entre si, Albuquerque et al. (2006) recomendam que a formação inicial proporcione ao futuro professor de Matemática um conhecimento aprofundado dos conceitos, dos procedimentos e das estruturas da Matemática, da natureza da Matemática como ciência ligada a outras ciências e dos tópicos da Matemática elementar. Para além disso, recomenda que o futuro professor saiba trabalhar em Matemática explicitando o seu raciocínio, sendo crítico perante os caminhos e os procedimentos tomados na resolução de problemas matemáticos, realizando justificações ou refutações matemáticas. A fim de alcançar esse objetivo, os autores recomendam que a formação inicial desenvolva orientações didáticas, que promovam a participação mais ativa dos futuros professores em experiências matemáticas que considerem exploração e conexões entre as diferentes representações dos conceitos matemáticos, a resolução de problemas, e a modelação matemática; e recorram a integração das tecnologias computacionais.

Para Ponte e Chapman (2008), orientações didáticas para o ensino da Matemática, devem contemplar o estudo da Matemática para além do que é necessário para o ensino, e o estabelecimento claro das suas relações com a Matemática que se vai ensinar. Na visão desses autores, isso corresponde à integração de aspetos didáticos no ensino dos conteúdos matemáticos, de modo a proporcionar aos futuros professores experiências de aprendizagem que se revelem mais próximos da prática de sala de aula, como por exemplo, experimentações, modelações, provas e refutações, entre outros.

Experiências como essas contribuem para que o futuro professor possa criar, ampliar e aprofundar o *conhecimento matemático* em cada fase de sua carreira (CBMS, 2012). Por isso, CBMS (2012, p.5) recomenda que os "cursos de formação de professores de Matemática devem ser projetados para preparar os futuros professores para a aprendizagem da Matemática ao longo da vida, ao invés de ensinar-lhes tudo o que vai precisar saber", buscando envolver a integração entre o conteúdo e a pedagogia com vista ao desenvolvimento profissional do professor.

Os cursos de formação inicial de professores de Matemática são os grandes responsáveis pela preparação do futuro professor para a docência. Por isso, cabe a formação inicial proporcionar ao futuro professor um conjunto adequado de conhecimentos, integrados entre si, com vista à iniciação da prática profissional

(Albuquerque et al., 2006; CBMS, 2012; SBEM, 2013). Isto consiste em proporcionar ao professor o desenvolvimento adequado do conhecimento dos conteúdos matemáticos necessários à sua prática docente e da natureza desses conteúdos, do conhecimento das questões pedagógicas, estrutura e funcionamento do sistema de ensino no qual irá atuar, do conhecimento das questões didáticas necessárias à compreensão tanto de como os alunos aprendem os conteúdos quanto dos métodos e as formas de ensinar os conteúdos matemáticos e do conhecimento das diretrizes nacionais sobre o ensino e a escola, entre outros (Albuquerque et al, 2006; Ponte, 2014; Ponte & Chapman, 2008; SBEM, 2013).

Esses conhecimentos são necessários ao professor para que venha a "sentir-se à vontade quando ensina, ser capaz de relacionar ideias particulares ou procedimentos dentro da Matemática, de conversar sobre a matemática e de explicar os juízos feitos e os significados e razões para certas relações e procedimentos" (Albuquerque et al, 2006, p.14). Por isso, é fundamental que a formação inicial envolva os futuros professores em experiências que possibilitem a integração entre esses conhecimentos, com vista a prática em sala de aula, tais como, em abordagens inovadoras de ensino dos conteúdos matemáticos que recorram à modelação matemática, a jogos, materiais manipuláveis, ao uso de tecnologia digitais, entre outros, os quais podem favorecer a consolidação de ideias matemáticas de modo mais significativo (Albuquerque et al., 2006; SBEM, 2013).

No mesmo sentido, Branco (2013) indica que a formação inicial deve contribuir significativamente para que o futuro professor desenvolva um adequado e integrado conjunto de conhecimentos dos conteúdos, didáticos, científicos e curriculares, e que continuará sendo desenvolvido ao longo da sua futura prática docente. Esse contributo não deve ser restrito apenas à integração de conhecimentos relacionados à dimensão académica, mas sobretudo, que seja orientada para a prática através de experiência de contexto escolar, permitindo assim uma aproximação gradual do futuro professor ao mundo da escola (Ponte, 2012).

Portanto, não se trata, apenas, de identificar quais são os conhecimentos necessários ao futuro professor para o exercício da sua profissão e quais as conceções que estruturam esse conhecimento profissional, mas também, compreender a natureza desse saber, inseparável da prática docente e do modo como é construído, a partir de experiências e processos reflexivos de contexto escolar (Branco, 2013; Ponte, 2012).

2.3. A formação inicial de professores de Matemática no Brasil: um breve panorama

Atualmente, no Brasil, a formação inicial dos professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental II (6º ao 9º ano) e do Ensino Médio (1º ao 3º ano) é regulamentada pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDBEN 9394/96 (BRASIL, 1996) e pelas resoluções CNE/CP1/2002 (BRASIL, 2002a) e CNE/CP2/2002 (BRASIL, 2002b) do Conselho Nacional de Educação – CNE e acontece no ensino superior na Licenciatura em Matemática. Esse curso tem uma duração mínima de quatro anos, sendo oferecido pelas Universidades e Institutos Superiores de Educação, públicos ou particulares, e fiscalizado pelo Ministério da Educação – MEC. Como prevê a LDBEN no artigo 62.º:

> A formação de docentes para atuar na educação básica far-se-á em nível superior, em curso de licenciatura, de graduação plena, em universidades e institutos superiores de educação, admitida, como formação mínima para o exercício do magistério na educação infantil e nas quatro primeiras séries do ensino fundamental, a oferecida em nível médio, na modalidade Normal. (BRASIL, 1996)

Essa modalidade de ensino superior é fruto de diversas conquistas e avanços da sociedade brasileira. Até 1934, não existia curso de formação de professores de Matemática no Brasil. Os professores que ensinavam Matemática no Ensino Secundário, o que atualmente corresponde ao Ensino Médio, eram na sua grande maioria, engenheiros ou militares, formados pelas Escolas Politécnicas e Escolas Militares. Segundo Cruz (2010):

> Até o início dos anos 1930, por não existir instituições formadoras de professor de Matemática para o ensino secundário, não se questionava a condição do engenheiro como professor de Matemática. A formação dos engenheiros contemplava cursos de Matemática e, dessa forma, habilitavam-se como professores de um conteúdo que dominavam. Além disso, os concursos oficializavam e transformavam engenheiros em professores de Matemática (p. 22).

Somente após a criação da Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da Universidade de São Paulo – FFCLUSP, em 1934, é que o primeiro curso de formação de professores de Matemática passou a existir. No entanto, segundo Duarte et al. (2010), neste curso, cuja duração era de três anos, dava-se ênfase apenas aos conteúdos matemáticos. Somente através do Decreto nº 1190 de 1939 (BRASIL, 1939) é que se organizou a Faculdade Nacional de Filosofia, onde tiveram início os cursos de Licenciatura em Matemática contemplando no seu currículo disciplinas de Matemática e de Pedagogia. A partir desse decreto, passaram a ser concebidos os cursos de Bacharelado e de Licenciatura em Matemática (BRASIL, 1939).

De acordo com BRASIL (1939), o Bacharelado em Matemática constituiria um curso de três anos e era seriado da seguinte maneira: o 1º ano contemplava as disciplinas de Análise Matemática, Geometria Analítica e Projetiva, Física Geral e Experimental; no 2º ano aprendia-se Análise Matemática, Geometria Descritiva e complementos de Geometria, Mecânica Racional, Física Geral e Experimental; e no 3º ano ensinava-se conteúdos das disciplinas de Análise Superior, Geometria Superior, Física Matemática, Mecânica Celeste. Quem almejasse tornar-se professor de Matemática do Ensino Secundário deveria, após ter concluído o Bacharelado em Matemática, concluir o curso de didática que tinha duração de um ano e compreendia as seguintes disciplinas: Didática Geral, Didática Especial, Psicologia Educacional, Administração Escolar, Fundamentos Biológicos da Educação e Fundamentos Sociológicos da Educação, conforme é confirmado pelo artigo 49.º desse decreto: “Ao bacharel, diplomado nos termos do artigo anterior, que concluir regularmente o curso de didática referido no art. 20.º desta lei será conferido o diploma de licenciado no grupo de disciplinas que formarem o seu curso de bacharelado” (BRASIL, 1939).

Pela estrutura apresentada, observa-se maior ênfase nos conteúdos matemáticos em detrimento dos conteúdos pedagógicos. Além disso, o curso de didática era oferecido pelo Instituto de Educação sem uma integração entre os conteúdos matemáticos e pedagógicos para o ensino. Segundo Duarte et al. (2010), nesse curso tinha-se um entendimento de que “bastaria unicamente um profundo conhecimento matemático para a formação de bons professores de Matemática” (p. 109). Essa estrutura curricular dos cursos de Licenciatura em Matemática ficou conhecida nacionalmente como sistema “3+1” isto é, nos três primeiros anos do curso, os alunos estudavam apenas as disciplinas de Matemática Científica, como por exemplo Análise, Álgebra e Geometria, e no último ano cursavam às disciplinas pedagógicas e realizavam um estágio. Essa estrutura foi sendo adotada por diversos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil até 2002.

Mesmo com algumas reformulações curriculares adotadas por algumas instituições de nível superior, até 2002, os cursos de Licenciatura em Matemática, com raríssimas exceções, mantinham a sua cultura académica voltada para os conteúdos matemáticos, sem considerar sua relação com os conteúdos da Matemática escolar, deixando a cargo dos Institutos de Educação discutir e refletir sobre as questões pedagógicas e de estágio, necessária para a formação docente.

Em algumas instituições, como a Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ onde me licenciei professor de Matemática, no 2º semestre letivo do ano de 2002, as disciplinas dos primeiros dois anos do curso de Licenciatura em Matemática (diurno) eram cursadas no Instituto de Matemática, juntamente com estudantes do Bacharelado em Matemática (curso científico de Matemática), e as disciplinas pedagógicas e o estágio, nos dois últimos anos, cursadas no Instituto de Educação, sem nenhuma colaboração entre os professores de ambos os institutos.

Entretanto, com o desenvolvimento da sociedade e os avanços tecnológicos, esse modelo de ensino começou a ser questionado por vários profissionais e pesquisadores da área de Educação, inclusive pelo próprio governo brasileiro. Após inúmeras reuniões e audiências públicas sobre essa problemática, realizada com a participação de representantes das associações de professores de Matemática, do Conselho de Reitores das Universidades Brasileiras, dos trabalhadores em Educação e de órgãos dos governos Municipais, Estaduais e Federal ligados à Educação, foram aprovadas pelo Congresso Nacional Brasileiro e publicadas em 18 de fevereiro de 2002, as resoluções CNE/CP1/2002 e CNE/CP2/2002. Estas resoluções constituem as "Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da educação básica", levando à reformulação do antigo modelo de ensino:

> Dessa forma, a Licenciatura ganhou, como determina a nova legislação, terminalidade e integralidade própria em relação ao Bacharelado, constituindo-se em um projeto específico. Isso exige a definição de currículos próprios da Licenciatura que não se confundam com o Bacharelado ou com a antiga formação de professores que ficou caracterizada como modelo "3+1" (BRASIL, 2001, p. 6).

Entre as importantes mudanças promovidas pelas resoluções CNE/CP1/2002 e CNE/CP2/2002 salienta-se que:

- *O curso de Licenciatura em Matemática passa a ter autonomia própria desvinculando-se do curso de Bacharelado em Matemática.* Isso permitiu um suporte legal para implementação de um projeto institucional próprio visando a formação de professores de Matemática, que focasse os problemas e as especificidades dos diferentes níveis de ensino da Educação Básica, estabelecendo o equilíbrio entre o domínio dos conteúdos curriculares e de como os adequar à situação didática. Quando ligado ao Bacharelado em Matemática, a implantação de um projeto com tais características, no curso de Licenciatura em Matemática, seria no mínimo bastante difícil de acontecer (BRASIL, 2001; SBEM, 2013).
- *O curso de Licenciatura em Matemática passa a ser fundamentalmente um espaço de construção coletiva de conhecimento sobre o ensino e aprendizagem de Matemática da Educação Básica, tendo como suporte a LDBEN 9394/96, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN[2] e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[3].* Assim, a Licenciatura em Matemática passa a ter mais autonomia para implementar um currículo e ações institucionais que focassem na reflexão e aplicação dos fundamentos metodológicos da formação do professor da Educação Básica, descritos na LDBEN *9394/96*, bem como conexões entre teoria e prática dos conteúdos da matemática escolar, seguindo orientações apresentadas pelos PCN (BRASIL, 2006) e, mais recentemente, a BNCC (BRASIL, 2018). É preciso destacar que, com a implementação da LDBEN *9394/96*, a Educação Básica é constituída como referência principal para a formação dos profissionais da Educação, independente da área de atuação.
- *O curso de Licenciatura em Matemática passa a ser uma Organização Institucional de formação de professores.* A partir dessas resoluções nacionais, o curso de Licenciatura em Matemática passa ter autonomia para: (i) gerir as questões administrativas e pedagógicas; (ii) constituir direção e colegiados próprios, a fim de formular e executar seu projeto pedagógico de formação de professores; (iii) trabalhar de forma integrada e colaborativa com escolas da Educação Básica, desenvolvendo projetos

[2] Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN - são referências de qualidade para os Ensinos Fundamental e Médio do país, elaboradas pelo Governo Federal e publicada em BRASIL (2006). O objetivo é propiciar subsídios à elaboração e reelaboração do currículo, tendo em vista um projeto pedagógico em função da cidadania do aluno e uma escola em que se aprende mais e melhor.

[3] A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo do Ministério da Educação do Brasil que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagem essenciais que todos os alunos precisam desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica (BRASIL, 2018).

de ensino, pesquisa e docência, como é o caso do PIBID[4]; e (iv) proporcionar o desenvolvimento profissional dos formadores, possibilitando-lhes espaço e encontros para atividades coletivas, a fim de refletirem sobre temas relacionados a formação matemática e didática dos futuros professores orientada para a prática docente (BRASIL, 2001; SBEM, 2013).

- *O curso de Licenciatura passa a ter autonomia para gerir sua própria matriz curricular.* A lógica nas matrizes curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática, até então, é alterada. Ao invés de uma matriz curricular formada por uma listagem de disciplinas obrigatórias, com pouco enfoque didático, o curso de Licenciatura passa a ter autonomia para reformular a sua matriz curricular, tomando como referência inicial um conjunto de competências necessárias aos futuros professores de Matemática para atuação na Educação Básica (BRASIL, 2001; SBEM, 2013).

Mesmo com todas estas mudanças que vêm acontecendo no setor educacional brasileiro nas últimas duas décadas, com o intuito de propor e regulamentar um novo modelo de formação inicial de professores de Matemática, tem-se observado que mudanças ainda são muito pouco evidentes (SBEM, 2013). Grande parte dos atuais cursos de Licenciatura em Matemática das Instituições de Ensino Superior no Brasil, mesmo tendo realizado mudanças no seu currículo para se adequar às diretrizes nacionais, admitem que grande parte dos seus professores-formadores continuam a adotar, em sala de aula, práticas conservadoras de ensino totalmente voltadas para as questões puramente matemáticas, deixando as questões de investigação e da didática da Matemática por conta dos professores de Educação Matemática:

> Conceitualmente falando, o curso de Licenciatura atual ainda é muito parecido com o criado na Universidade de São Paulo (USP), em 1934. Na maioria das instituições, as disciplinas ainda são agrupadas em conteúdo específico e conteúdos pedagógicos, com tendência a valorizar mais o primeiro grupo que o segundo, mesmo em se tratando da formação do professor de Matemática e não do bacharel em Matemática. Ainda não se discute uma profissionalização do professor, nem uma formação do formador (SBEM, 2013, p. 3-4).

---

[4] Programa do Governo Federal que oferece bolsas de iniciação à docência aos alunos de cursos presenciais das licenciaturas, que se dediquem ao estágio nas escolas públicas e que, quando graduados, se comprometam com o exercício do magistério na rede pública. Para saber mais acesse http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=233&Itemid=467.

Isso demonstra que os processos de ensino instalados nas instituições brasileiras, antes das Diretrizes Nacionais CNE/CP1/2002 e CNE/CP2/2002, traçaram um formato aos cursos de Licenciaturas em Matemática que está sendo difícil de superar em muitas dessas instituições. É possível que o distanciamento e/ou falta de articulação entre os diferentes tipos de conhecimento que compõem o conhecimento profissional do futuro professor seja uma das causas dessas propostas ainda não terem sido implementadas com eficácia nesses cursos, fazendo emergir alguns problemas na formação dos futuros professores de Matemática (SBEM, 2013).

Talvez pela exigência e necessidade de um conhecimento profundo da Matemática para ensinar, muitos professores das disciplinas de Cálculo, Álgebra e Análise, por exemplo, têm promovido o ensino dos conteúdos dessas disciplinas por uma abordagem de ensino direto (Ponte, 2005), semelhante à forma de ensino e aprendizagem a que foram submetidos na sua formação, baseado unicamente na exposição de conteúdos sem a interação do estudante (Garzella, 2013; SBEM, 2013). Deste modo, reproduzem um ensino técnico-formal (Reis, 2001), isto é, um ensino centrado única e exclusivamente na demonstração dos teoremas e dos corolários, sem realizar uma transposição didática para o que realmente é importante e necessário à formação do futuro professor de Matemática da Educação Básica. Como resultado, verifica-se altos índices de reprovação e abandono nessas disciplinas e desinteresse pelo curso, como evidenciado por exemplo em pesquisas sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo no início dos cursos de Licenciatura em Matemática (Garzella, 2013; Rezende, 2003).

Esse distanciamento é também visível na realidade presente em grande número dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil, em que muitos professores das disciplinas de Matemática Científica têm que se dividir entre manter sua produção científica e académica por meio de pesquisa e publicações na sua área de formação e atuação, lecionar no curso de Licenciatura em Matemática e simultaneamente noutros cursos, como o Bacharelato em Matemática, ou cursos de mestrado e/ou doutorado, entre outros (Garzella, 2013; SBEM, 2013). Numa prática profissional com tais características, não há muito espaço para reflexões sobre as questões relacionadas com a Didática da Matemática na Educação Básica, tornando-se um obstáculo à excelência da formação dos professores de Matemática (SBEM, 2013).

Essas discussões trazem à tona o seguinte questionamento: como um professor-formador com formação e prática profissional exclusivamente associada à Matemática pura, conseguirá estabelecer uma integração entre os conteúdos de Matemática e as questões da Didática da Matemática, sem ter vivenciado experiências ou reflexões sobre elas? Na busca por respostas para essa questão, observa-se nas recomendações da SBEM (2013) duas sugestões para superar esses obstáculos: (i) é essencial que o formador de professores de Matemática tenha interesse profissional pelas questões relacionadas ao trabalho de formação escolar em Matemática, na Educação Básica; e (ii) cabe ao coordenador do curso da Licenciatura em Matemática e ao Núcleo Docente Estruturante – NDE se empenharem em desenhar também processos de formação dos formadores, no sentido de eventualmente compor um corpo docente que seja capaz de promover a formação de professores de Matemática que possuam identidade própria, que estejam sintonizados com a realidade escolar brasileira e em condições de propor alternativas para superar as dificuldades, associadas ao desenvolvimento da educação escolar em matemática.

Por todo o exposto, é reforçada a ideia de que as diretrizes do MEC sobre a formação de professores de Matemática no Brasil, configuram-se numa proposta muito boa para se chegar à excelência da formação de professores de Matemática, nos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil, mas cuja execução precisa de ser reforçada. Diante desse atual cenário é que se encontra a formação dos professores de Matemática da Educação Básica no Brasil.

Capítulo 3

O ensino e a aprendizagem de limite e continuidade de funções

Neste terceiro capítulo apresento um enquadramento teórico sobre o ensino e a aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade de funções, no âmbito da introdução ao Cálculo. Procuro, assim, descrever e fundamentar o suporte teórico para o quadro de análise de dados. Os tópicos apresentados incluem as principais abordagens de ensino e aprendizagem, uma revisão de literatura sobre as dificuldades dos estudantes, bem como as potencialidades e limitações do uso do GeoGebra, um *Software de Geometria Dinâmica*, na aprendizagem desses conceitos matemáticos.

3.1. Ensino e aprendizagem de limite e continuidade

3.1.1. Elementos de ensino e aprendizagem de limite e continuidade

Os conceitos de limite e continuidade de funções são fundamentais para o Cálculo, uma vez que constituem a base de diversas definições e pressupostos de aplicabilidade de seus inúmeros teoremas (Juter, 2006; Tall & Katz, 2014). Atendendo à sua relação próxima com muitos outros conceitos matemáticos, como por exemplo, funções, convergência, infinito, infinitesimais, entre outros, os conceitos de limite e continuidade são abordados nas disciplinas iniciais de Matemática dos cursos de formação inicial de professores de Matemática, onde a sua importância é salientada em diversos documentos orientadores curriculares (Albuquerque et al., 2006; CBMS, 2012; SBEM, 2013). A aprendizagem destes conceitos é necessária para que os estudantes avancem, no seu percurso escolar, para uma aprendizagem mais formal e rigorosa do Cálculo (Juter, 2006; Sealey et al., 2014; Tall, 1993).

Em disciplinas de introdução ao Cálculo é consensual que a aprendizagem do conceito de limite envolve o conhecimento de *limite de um função num ponto*, *limite* *infinito* e *limite no infinito,* enquanto que o conceito de continuidade considera a *continuidade local* (num ponto de seu domínio) e *continuidade global* (num intervalo) de uma função como aspetos da sua aprendizagem (Bressoud, et al., 2015).

Considera-se por *limite de uma função num ponto*, ou simplesmente *limite no ponto*, o número real L que satisfaz a seguinte definição informal: Seja f uma função e x_0 um número real. O número L é o limite da função f no ponto x_0, quando x se aproxima de x_0 mais do que qualquer aproximação e suas imagens $f(x)$ tornam-se mais próximas de L do que qualquer outra quantidade fixa. De simbólica tem-se que $f(x) \to L$ quando $x \to x_0$ e representa-se pela notação $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ (Pons, Valls & Llinares, 2011; Tall & Vinner, 1981). Esta definição é 'informal' pois os termos 'aproxima de' e 'tornam-se mais próximas de' são imprecisos, sendo o seu significado dependente do contexto. Enquanto para um engenheiro mecânico, 'próximo' pode significar alguns milímetros, para um físico que estuda o movimento dos planetas, 'próximo' pode significar alguns milhares de anos-luz. No entanto, essa definição é razoavelmente útil para explicar o limite num ponto de várias funções, no início da sua aprendizagem (Fernández-Plaza et al, 2013; Mira-López, 2016).

Existem muitos casos em que o comportamento das imagens $f(x)$ aumenta sem limitação de um número real positivo ($f(x) \to \infty$) ou diminui sem limitação de um número real negativo ($f(x) \to -\infty$), quando $x \to x_0$. Nesses casos, apesar de f não possuir limite quando $x \to x_0$, é conveniente descrever o comportamento 'infinito' de suas imagens $f(x)$ quando $x \to x_0$, o que se denomina por *limite infinito* e se representa respetivamente pela notação $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ (Juter, 2006; Maurice, 2000). Salienta-se que o símbolo de infinito (∞) não representa um número real mas o comportamento infinito, particularmente das imagens de $f(x)$. A aprendizagem do limite infinito é importante, por exemplo, para a compreensão do conceito assíntota vertical ao gráfico de uma função, definida pela reta de equação $x = x_0$ cujo gráfico da função f dela se aproxima à medida que $x \to x_0$ (Maurice, 2000; Nair, 2010).

É importante, no estudo das funções, perceber o comportamento global de uma função, ou seja, saber o que acontece com os valores de suas imagens $f(x)$ quando x cresce ou decresce infinitamente em valores absolutos. Esse comportamento das imagens $f(x)$ quando $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$ é denominado por limite no infinito e representado pela notação $\lim_{x \to \infty} f(x)$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ (Maurice, 2000). Nos casos em que o resultado desse limite é um número real L, a função se aproxima e segue a direção de uma reta horizontal 'imaginária', de equação $y - L = 0$, denominada assíntota horizontal ao gráfico da função (Nair, 2010; Maurice; 2000).

Relativamente ao conceito de continuidade, uma função contínua num ponto do seu domínio é definida com base na noção de limite, quando o limite da função num ponto (L) é igual à imagem do respetivo ponto pela função, e representa-se pela expressão algébrica $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, a qual é denominada de definição informal de continuidade no ponto (Juter; 2006; Tall & Vinner, 1981). Quando essa igualdade não é satisfeita a função é denominada descontínua e x_0 é chamado de ponto de descontinuidade (Nair, 2010). A continuidade de uma função num intervalo acontece como consequência da continuidade da função em cada ponto do intervalo (Tall & Vinner, 1981).

Vários autores convergem no que diz respeito à importância dos estudantes desenvolverem conhecimentos sólidos a partir das *noções intuitivas* associadas ao limite e continuidade de uma função, nomeadamente, infinitesimais, comportamento do gráfico de uma função, infinitos, comportamentos contínuos ou descontínuos, entre outros, no decurso da aprendizagem desses conceitos (e.g. Artigue; 1991; Cornu, 1991; Domingos, 2003; Fernández-Plaza et al., 2013; Henning & Hoffkamp, 2013; Pons et al., 2011; Tall, 2006; William, 1991).

Apesar de ser difícil defini-la, a noção intuitiva é frequentemente considerada um conhecimento matemático informal baseado em pré-conceito, na perceção visual ou em ações não quantificadas. Ela desempenha um duplo papel na construção de um conceito matemático: por um lado é familiar aos estudantes facilitando assim a apreensão do conceito e por outro fornece uma base para o desenvolvimento de outros aspetos a ele associado (Tall, 2006; Henning & Hoffkamp, 2013).

Existem aspetos associados ao limite e continuidade de funções que são melhor compreendidos pela intuição, como por exemplo, o caráter dinâmico do limite onde o $\lim_{x \to x_0} f(x)$ é concebido como o resultado do processo de aproximação das imagens da função a um valor fixo, à medida que os valores x do seu domínio tendem a x_0, e a característica ininterrupta do comportamento gráfico de algumas funções contínuas, e por isso, devem ser desenvolvidos pelos estudantes antes da aprendizagem formal desses conceitos (Cornu, 1991; Tall, 2006).

São noções intuitivas dos conceitos de limite e continuidade, por exemplo: as noções de aproximações simultâneas $x \to x_0$ e $f(x) \to L$ ou mesmo $x \to x_0$ e $f(x) \to \pm\infty$ para descrever o limite no ponto ou limite infinito e a noção de continuidade de uma função associada ao traçado do gráfico da função sem apresentar interrupções, as quais são importantes para a apreensão da definição informal de cada um desses conceitos (Cornu, 1991; Fernández-Plaza et al, 2013; Tall & Vinner, 1981). Ademais, elas podem favorecer o reconhecimento: da (in)existência do $\lim_{x \to x_0} f(x)$, do comportamento asssíntótico vertical e/ou horizontal do gráfico de uma função, do declive da reta tangente ao gráfico de uma função, ou da (des)continuidade de uma função num ponto $x = x_0$ ou num intervalo, os quais constituem objetivos de aprendizagens do limite e continuidade de funções (Biza & Zacharides 2010; Juter, 2006; Nair, 2010).

Também deve ser considerada, na aprendizagem desses conceitos, uma abordagem de *cálculo algébrico* que consiste no tratamento algébrico do cálculo de limite (Juter, 2006; Bressoud et al., 2015). Esta abordagem inclui, entre outros procedimentos, calcular o limite de uma função mediante a realização de procedimentos numéricos e algébricos de substituição dos valores de variáveis e, em muitos casos, tendo que resolver indeterminações $\left(\text{e.g. } \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty\right)$. Para isso, é requerido um bom domínio da Álgebra no trabalho com variáveis em expressões algébricas, na manipulação algébrica para simplificação de expressões, factorização de polinómios, racionalização de frações algébricas e resoluções de equações, os quais não seriam possíveis com recurso apenas a noções intuitivas (Maurice, 2000; Nair, 2010).

O cálculo algébrico é essencial à resolução de muitos problemas que requerem a aplicação do conceito de limite, como por exemplo, problemas de otimização que são resolvidos com a aplicação da taxa de variação instantânea de uma função. Tem-se, por exemplo, o problema de maximizar o volume de uma caixa de formato paralelepípedo obtida por dobragem de uma folha de papel reticulado (NCTM, 2000) que, para resolvê-lo, o estudante deverá ser capaz de traduzir algebricamente a função que representa o volume da caixa; reconhecer que a taxa de variação instantânea da função no ponto máximo é nula, traduzindo-a por $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$ (ou equivalente); calcular depois o limite de uma função por meio de procedimentos algébricos, podendo incluir a resolução de uma indeterminação, e interpretar o resultado para obter o volume máximo da caixa (Biza & Zachariades, 2010; Orts, Llinares & Boigues, 2016).

Salienta-se, ainda, que, a taxa de variação instantânea de uma função, representada algebricamente por $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ou equivalente, ocupa um papel central na aprendizagem do Cálculo, pois configura-se numa aplicação direta do conceito de limite e constitui-se na definição do conceito de derivada, cuja interpretação geométrica corresponde ao declive da reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $(x_0, f(x_0))$ (Artigue, 1991).

O cálculo algébrico associado ao conceito de continuidade de função é utilizado em aplicações desse conceito onde a verificação algébrica de $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ é exigida (Dikovic, 2009; Sealey et al., 2014). Um exemplo é a validação da continuidade de uma função como pressuposto de aplicação de diversos teoremas do Cálculo, como o Teorema do Valor Intermédio (TVI) que define: Seja $f: [a, b] \to R$ uma função contínua. Se d for um número real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, com $f(a) \neq f(b)$, então existirá um $x_0 \in]a, b[$ tal que $f(x_0) = d$ (Lima, 2006; Strand, 2016). Este teorema possui várias aplicações teóricas interessantes, entre elas, o problema de garantir a existência de raiz de uma equação, o qual constitui a base de muitos problemas de Física e Química (Sealey et al., 2014). O TVI também é fundamental à demonstração de diversos teoremas matemáticos, como por exemplo, os teoremas do ponto fixo, que assegura a existência de um ponto fixo de uma função ($x \in D_f$ tal que $f(x) = x$) e o teorema fundamental da álgebra garante que qualquer polinómio de uma variável, de grau $n \geq 1$ e coeficientes complexos, possui pelo menos uma raiz complexa (Lima, 2006; Strand, 2016).

Na aprendizagem do TVI, a literatura salienta, entre outros aspetos, a importância dos estudantes reconhecerem os pressupostos de sua aplicabilidade, nomeadamente a continuidade de uma função num intervalo $[a, b]$ e $d \in [f(a), f(b)]$, serem capazes de validá-los utilizando a definição de continuidade e de aplicarem estes conhecimentos na resolução de problemas (Sealey et al., 2014; Strand, 2016). Estes autores também destacam a importância do ensino TVI ser orientado por uma abordagem que promova a compreensão das noções formais e/ou informais da continuidade de uma função e o significado e o papel da simbologia algébrica na proposição que o define, os quais podem favorecer a identificação e validação dos pressupostos do TVI, e promover a resolução de problemas que requerem a sua aplicação, disponibilizando assim condições concretas de sua utilização.

A literatura também defende o uso de uma abordagem formal à aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade, baseada na expressão algébrica que os definem, a partir da noção de vizinhança e dos quantificadores, denominada por *definição formal*. Nesta perspetiva, a definição formal do limite no ponto é expressa por $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \delta > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $|x - x_0| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$ (Swinyard & Larsen, 2012). Esta definição é uma base fundamental para várias demonstrações no Cálculo e essencial à formalização do conceito de continuidade, uma vez que a definição formal de continuidade surge como resultado da definição formal do limite, no caso particular em que $L = f(x_0)$, sendo expressa por: A função f é contínua no ponto $x = x_0$ se e somente se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $|x - x_0| < \delta$ então $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (Tall et al., 2008).

A riqueza contida na definição formal de limite, no que respeita à notação simbólica/algébrica, pode contribuir para os estudantes desenvolverem a capacidade de pensar abstratamente e construir intuições adequadas sobre o limite e continuidade de funções, sendo a aprendizagem desta definição fundamental para que os estudantes avancem para uma aprendizagem mais formal e rigorosa dos conceitos de limite e a continuidade de uma função, e possam ser capazes de reconhecê-los e representá-los formalmente (Tall et al., 2008).

Uma aprendizagem adequada dessa definição formal é evidenciada quando o estudante é capaz de: (i) interpretar corretamente as simbologias envolvidas em $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ e dos quantificadores e de sua ordem na referida expressão algébrica; (ii) operar corretamente com as desigualdades $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ a fim de encontrar o valor de δ que valida a inequação $|f(x) - L| < \varepsilon$, garantindo assim a existência do limite; (iii) interpretar e traduzir formalmente outros tipos de limite, por exemplo, o limite no infinito $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ por $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, A > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $x > A$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$; e (iv) realizar validações matemáticas correspondentes à demonstração de conjeturas, propriedades ou teoremas matemáticos, que requerem a aplicação da definição formal do limite, como por exemplo, provar formalmente a continuidade de uma função no ponto (Cottrill et al, 1996; Domingos, 2003; Swinyard & Larsen, 2012; Tall, 1991).

Para alcançar uma aprendizagem adequada da definição formal de limite, Tall et al. (2008) sugerem que o seu ensino deve relacionar as noções informais do limite com a simbologia algébrica da sua definição formal, recorrendo-se à construção de intuições adequadas, por meio da exploração de suas diferentes representações (numéricas, simbólicas e gráficas) que encaminhem os estudantes a futuras formalizações. Isto significa, por exemplo, explorar as aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to L$, em termos das vizinhanças $V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$ representadas através de intervalos e desigualdades, bem como o significado dessas simbologias e do seu papel na expressão da definição formal, promovendo um sentido mais completo dos conceitos envolvidos e facilitando o entendimento de simbologias algébricas (Swinyard & Larsen, 2012).

No entanto, uma abordagem inicial ao limite e continuidade que recorra essencialmente às suas definições formais pode não ser vantajosa para a aprendizagem desses conceitos e por isso deve ser evitada (Tall, 2006; Rezende, 2003). Em vez de considerar as definições formais na introdução desses conceitos, os quais contém elementos não familiares para o estudante, é preferível considerar uma abordagem que contemple noções intuitivas e forneça a base para o desenvolvimento matemático formal, de modo a conduzir os estudantes à formalização desses conceitos (Swinyard & Larsen, 2012; Tall, 2006).

Pelo exposto, a aprendizagem do limite e continuidade pressupõe envolver os estudantes no trabalho com *noções intuitivas, cálculo algébrico* e *abordagem formal*, as quais são frequentemente sugeridas nas orientações curriculares (Bressoud, et al., 2015; SBEM, 2013) e em diversos manuais (Finney et al, 2009) que contemplam o ensino de Cálculo. Para isso, os estudantes devem ser instruídos e estimulados com experiências que envolvam essas abordagens, de forma integrada, de modo a alcançarem uma maior compreensão desses conceitos matemáticos e serem capazes de aplicá-los na resolução de problemas.

3.1.2. Dificuldades dos estudantes na aprendizagem de limite e continuidade

Diversas investigações em Educação Matemática têm apontado dificuldades dos estudantes do ensino superior, no que diz respeito à aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade de funções, constatadas, inclusive, nos cursos de formação inicial de professores de Matemática, onde se espera que os estudantes adquiram um conhecimento matemático aprofundado para os poderem ensinar (e.g. Cottrill et al., 1996; Domingos, 2003; Fernández-Plaza et al., 2013; Juter, 2006; Maurice, 2000; Messias & Brandember, 2015; Nair, 2010; Swinyard & Larsen, 2012; Tall, 1993; 2006).

Tall (1993), por exemplo, procurando refletir sobre as dificuldades encontradas pelos estudantes na aprendizagem do Cálculo e obter evidência empírica que possibilitasse a construção de teorias sobre abordagens mais eficientes de ensino e aprendizagem do Cálculo, fez uma análise de diversas pesquisas internacionais sobre esse tema. O autor sinaliza que as pesquisas revelam dificuldades cognitivas dos alunos sobre a aprendizagem do conceito de limite, incluindo: incompreensões dos termos 'limite', 'tende a', 'aproxima-se', 'tão pequeno quanto queremos'; conceções errôneas do infinito na interpretação de 'N suficientemente grande'; dúvida sobre o limite ser alcançado pela função e incompreensões do comportamento global (no infinito) de uma função.

Maurice (2000), por sua vez, estudou as conceções dos estudantes universitários iniciantes de um curso de Cálculo sobre indeterminações no cálculo de limites de funções quando $x \to \infty$ e em torno de pontos $x = x_0$ onde a função é indefinida. Os resultados do seu estudo revelam que os estudantes manifestaram conceções erróneas sobre formas indeterminadas $\left(\frac{0}{0} \text{ e } \frac{\infty}{\infty}\right)$, divisão por zero, e a sua importância e aplicação no cálculo dos limites. Segundo o autor, muitos estudantes não tinham conhecimento de como estas duas formas de indeterminação no cálculo de limite se relacionam com a identificação dos tipos de descontinuidade, tipos de limites e possível existência de assíntotas. Em alguns casos, a assíntota vertical era vista como parte do gráfico da função.

Algumas das dificuldades anteriores são igualmente constatadas por Juter (2006), na sua pesquisa com estudantes iniciantes no curso de Matemática, de uma universidade da Suécia, sobre limites e continuidade de funções. A autora observa que a generalidade dos estudantes apresentou diversas desconexões na aprendizagem desses conceitos matemáticos, nomeadamente, entre perceções intuitivas e formais, perceções processuais e estáticas e entre o finito e o infinito, sendo esta uma razão para os muitos erros revelados por esses estudantes, de que é exemplo a conceção errónea de que os limites não podem ser alcançados pela função.

Outras dificuldades são apresentadas por Nair (2010), como resultado de uma investigação com estudantes da disciplina de Cálculo que procurava perceber quais as compreensões e conexões que eles estabeleciam entre os conceitos de limites, continuidade e assíntotas de funções racionais. A autora identificou dificuldades relacionadas com a utilização correta da terminologia de limite e continuidade, a interpretação de limites e continuidade a partir do gráfico da função e a relação entre limites e o comportamento de assíntotas de funções. Algumas das dificuldades identificadas no seu estudo são: (i) não reconhecer "quem está se aproximando de quem", ou seja, não compreender que 'x se aproxima de x_0' e '$f(x)$ se aproxima de L' no caso de $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$; (ii) incompreensão da existência do $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, causada por associá-lo ao valor da imagem $f(x_0)$; (iii) conceção errónea da continuidade de uma função associando-a exclusivamente à existência do limite nesse ponto; e (iv) conceção errónea da inexistência de assíntota vertical de uma função sempre que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{0}{0}$.

Para Tall (2006), as dificuldades associadas a interpretações e/ou conceções erróneas evidenciam problemas na forma como as *noções intuitivas* do conceito de limite são abordadas e trabalhadas com os estudantes, e sugere que o ensino desses conceitos considere a construção de intuições adequadas, antes dos conceitos serem formalmente apresentados e discutidos.

Outro problema constatado na aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade de funções consiste em dificuldades associadas aos processos e procedimentos no campo da Álgebra, como por exemplo, no trabalho com variáveis em expressões algébricas e na manipulação algébrica para simplificação de expressões, factorização e racionalização de frações algébricas e resolução de equações (Juter, 2006; Maurice, 2000).

No estudo de Juter (2006), os estudantes que apresentaram maiores dificuldades na aprendizagem de limite, revelaram possuir deficiências nos procedimentos de tópicos de álgebra ou funções, os quais foram a causa de vários erros de manipulações algébricas no cálculo do limite. Por exemplo, erros ao relacionar a divisão por zero a um número real concluindo que $\frac{2}{0} = 2$ no cálculo do $\lim_{x \to 0} \frac{2}{x} = \frac{2}{0} = 2$, e na simplificação de fração algébrica no cálculo de $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3-2}{x^3+1} = -\frac{2}{1} = -2$ ao eliminar termos algébricos comuns ao denominador e denominador (x^3) que não são fatores de produto, segundo a autora, expõem falta de conhecimento de regras básicas de cálculo algébrico que não deveriam existir no nível superior (Juter, 2006).

Este problema é sinalizado também por Domingos (2003), no seu estudo realizado com estudantes iniciantes de diferentes cursos do ensino superior que incluía a licenciatura em Matemática. O autor verificou que a generalidade dos estudantes apresentou grandes dificuldades na realização de processos e procedimentos algébricos, tais como o cálculo algébrico de limites, operações com funções envolvendo módulos, ou o cálculo de determinados pontos críticos das funções. Também não foram capazes de aplicar procedimentos algébricos, com base nas simbologias da definição formal de limite, para provar a continuidade de uma função. Segundo o autor, tais dificuldades parecem estar relacionadas com a tendência dos estudantes para a memorização dos processos, em vez da compreensão dos mesmos.

Também Nair (2010) verificou que os estudantes manifestaram dificuldades com a resolução algébrica de formas indeterminadas $\left(\frac{0}{0} \text{ e } \frac{\infty}{\infty}\right)$ e a divisão por zero $\left(\frac{k}{0}, k \in \mathbb{R} - \{0\}\right)$ no cálculo de limites, a fim de determinar assíntotas horizontais e/ou verticais ao gráfico de uma função. Além disso, alguns estudantes não conseguiram reconhecer o(s) ponto(s) $x = x_0$ onde uma função racional é indefinida, associá-lo(s) ao(s) possível(is) candidato(s) a ponto de assíntota e resolver algebricamente o $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

Na literatura, também são evidenciadas dificuldades associadas à aprendizagem da *definição formal* de limite e continuidade de funções. São vários os estudos (Cottrill et al., 1996; Swinyard & Larsen, 2012; Tall & Vinner, 1981; Tall et al., 2008) que indicam que os estudantes, em cursos introdutórios de Cálculo, geralmente não são capazes de interpretar, comunicar ou aplicar coerentemente a definição formal de limite ou de continuidade, por não entenderem o significado da simbologia algébrica ou por não conseguirem operar com essas simbologias.

Tall e Vinner (1981) e Cottrill et al. (1996) constataram que os estudantes revelam incompreensão do número real $\varepsilon > 0$ como um número diferente de zero e menor que qualquer número real positivo, do uso dos quantificadores ou da sua ordem na definição formal de limite e da correspondência implicativa $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$. Estas incompreensões também se revelaram no estudo de Domingos (2003), sendo a causa de vários estudantes não conseguirem traduzir o limite representado geometricamente pela sua definição formal.

Tall et al. (2008) verificam, ainda, dificuldades dos estudantes no reconhecimento da notação algébrica $|f(x) - L| < \varepsilon$, uma vez que L é um valor fixo e $f(x)$ é uma grandeza variável. Dificuldades no significado $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ e o seu uso na aplicação da definição formal de limite também são identificadas nos estudos de Domingos (2003), Cottrill et al. (1996) e Swinyard e Larsen (2012).

Muitas das dificuldades referidas anteriormente são causadas por obstáculos epistemológicos do conceito de limite e continuidade que ocorrem devido à natureza dos próprios conceitos matemáticos (Cornu 1991; Fernández-Plaza et al., 2013; Sierpinska, 1985). Um obstáculo é caracterizado por um conhecimento ou uma conceção, e não por uma dificuldade ou uma falta de conhecimento, que produz respostas adaptadas num certo contexto e, fora dele, produz respostas incorretas (Cornu, 1991). Assim, um conhecimento pode ser um obstáculo à aquisição de novos conhecimentos. Os obstáculos manifestam-se pela incompreensão de certos problemas ou pela impossibilidade de resolvê-los com eficácia, ou pelos erros que, para serem superados, deveriam conduzir ao estabelecimento de um novo conhecimento (Cornu, 1991; Sierpinska, 1985).

Cornu (1991), baseado numa pesquisa prévia onde se propôs identificar os obstáculos epistemológicos inerentes a aprendizagem de limites de funções, apresenta uma lista de quatro principais obstáculos: (i) falta de conexão da geometria com números; (ii) noção de infinitamente grande e infinitamente pequeno; (iii) aspeto metafísico da noção de limite; e (iv) se o limite é atingido ou não. A *falta de conexão da geometria com números* é caracterizada por dificuldades na transposição da noção de limite, estabelecida por meio de tratamento geométrico, baseada na noção de grandezas, para um tratamento numérico. As dificuldades com o significado *infinitamente grande* e *infinitamente pequeno* contemplam as incompreensões do conceito de limite que são resultado de conceções erróneas da noção de infinitesimais, presentes, por exemplo, na dificuldade de conceber o número rela $\varepsilon > 0$ como a representação de um número que não é zero, mas que ainda é menor do que qualquer número real positivo.

O *aspeto metafísico da noção de limite*, segundo Cornu (1991), refere-se as incompreensões na abstração da noção de limite, dentro da própria matemática, causada pela conceção do limite como um objeto metafísico ao invés de um objeto matemático.

Por fim, o obstáculo intitulado "*o limite é atingido ou não?*" é caracterizado pela dúvida se o limite pode ser alcançado (atingido) por determinada grandeza, causado, muitas vezes pelo uso coloquial e/ou quotidiano do termo limite como um processo inalcançável (Cornu, 1991; Fernández et al., 2013). Cornu (1991) ressalta que existem muitos outros obstáculos, para além dos apresentados anteriormente sobre o limite, sendo os erros cometidos pelos alunos, valiosas indicações para a identificação desses obstáculos.

Sierpinska (1985) publicou uma lista de obstáculos epistemológicos relativos à noção de limite, classificando-os em cinco categorias: (1) *o horror ao infinito*; (2) *obstáculos relacionados à noção de função*; (3) *obstáculos geométricos*; (4) *obstáculos lógicos;* e (5) *obstáculo do símbolo*. A autora afirma que essa lista não é definitiva ou exaustiva. O *Horror ao infinito* (*horror infiniti*) é o obstáculo que a autora considera mais importante. Esse obstáculo consiste no bloqueio que impede o estudante de ver o infinito, impedindo-o de aceitar os conjuntos infinitos: "É uma forma de miopia que impede de ver o infinito atual, se bem que, na sua forma superior esse infinito nos criou e nos mantém, e nas suas formas secundárias transformadas ele se manifesta em torno de nós e permanece em nossas mentes" (Sierpinska, 1985, p. 39). Este obstáculo, segundo a autora, leva os alunos, em algumas situações, a transferir os métodos algébricos de manipulação de grandezas finitas para as grandezas infinitas. A questão de decidir se uma grandeza variável alcança ou não seu limite é um sinal da presença desse obstáculo, evidenciado, por exemplo, quando um estudante é questionado se a dízima periódica $0{,}999\ldots$ é menor ou igual a 1, responde que é menor que 1, não se apercebendo que a parte decimal formada pela sequência infinita de 'noves' alcança a unidade.

Os *obstáculos relacionados à noção de função*, segundo Sierpinska (1985), apresenta dois aspetos principais: (i) maior preocupação de como os valores de $f(x)$ são determinados a partir dos valores atribuídos a x, sem no entanto analisar o comportamento da função f numa vizinhança de x_0; e (ii) não distinção entre a noção de limite e noção de ínfimo e supremo do conjunto imagem, exemplificado quando um estudante escreve $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$ e justifica a existência do limite com base no valor obtido, ao resolver a questão: 'Considere a função $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & se \quad x \neq 0 \\ 1 & se \quad x = 0 \end{cases}$. É possível determinar o valor $\lim_{x\to 0} f(x)$*?* Justifique'.

De acordo com as indicações da autora, esse aluno apresenta um obstáculo relacionado com a noção de função, pois, para calcular o valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$, deveria ter atenção ao comportamento da função f na vizinhança do ponto $x = 0$.

O terceiro obstáculo indicado por Sierpinska (1985) corresponde aos *obstáculos geométricos*. Eles surgem quando a representação geométrica se configura num impedimento à compreensão do conceito de limite, revelado, por exemplo, na incompreensão do registo geométrico da desigualdade algébrica $|f(x) - L| < \varepsilon$, causado por dificuldade em conceber que L é um valor fixo e que $f(x)$ é uma grandeza variável.

Com relação aos *obstáculos lógicos*, Sierpinska (1985) faz referência à implicação lógica da definição formal de limite, e são revelados pela incompreensão do emprego dos quantificadores ou de sua ordem na referida expressão algébrica. A autora salienta que "Não é suficiente conhecer os quantificadores e suas propriedades para se aperceber do papel que a sua presença e a sua ordem desempenham na definição da noção de limite" (Sierpinska, 1985, p. 54).

A última categoria de obstáculos referidos por Sierpinska (1985) corresponde aos *obstáculos simbólicos*, que são caracterizados pela dificuldade na utilização de símbolos algébricos associados ao conceito de limite. Esse obstáculo é revelado, por exemplo, na incompreensão das simbologias da notação $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ que conduz muitos estudantes a dificuldade de conceber que 'limite é' e a 'função se aproxima', concluindo que o limite se aproxima (Celestino, 2008; Sierpinska, 1985).

Assim, atendendo aos inúmeros obstáculos, dificuldades e incompreensões, evidenciados por estudantes de diversos níveis de ensino na aprendizagem de conceitos matemáticos que requerem conhecimento conceitual de limite e continuidade de funções, a literatura tem defendido a importância do processo de ensino e aprendizagem desses conceitos matemáticos ser conduzido por uma abordagem que contemple a compreensão desses conceitos desde o seu início, tal como afirma Domingos (2001). Esta abordagem difere de uma aprendizagem "que assenta na aquisição de habilidades isoladas para as quais só à posteriori é desenvolvida uma compreensão de como é que estas funcionam formando um todo" (Domingos, 2001, p.1).

3.2. O GeoGebra na aprendizagem de limite e continuidade

Atualmente não podemos ignorar as tecnologias digitais e o seu potencial para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Especificamente em relação ao computador, uma vez presente no ambiente de aprendizagem, ele não é neutro e exerce uma influência nesses processos que deve ser considerada e investigada (Leung, 2017). A importância do seu uso no ensino de Matemática tem sido salientada, quer em diversas pesquisas (e.g. Leung, 2017; Stylianides & Stylianides, 2005; Tall et al., 2008; Villarreal, 1999) como também nos documentos orientadores para o ensino da Matemática (NCTM, 1998, 2000). De acordo com NCTM (1998):

> A tecnologia é uma força vital na aprendizagem, no ensino e na criação matemática, propiciando novas abordagens para resolver problemas e influenciar o tipo de questões a investigar. Deverá desempenhar um papel no ensino e na aprendizagem da Matemática. A tecnologia pode ser usada das mais diversas formas para intensificar e ampliar o ensino e a aprendizagem da Matemática (p. 138).

A integração das tecnologias digitais no ensino contribui para a criação de um ambiente de aprendizagem rico que permite a visualização e exploração dinâmica de diferentes representações dos conceitos matemáticos, nas três dimensões (1-D, 2-D e 3-D), e que não seria possível num contexto de papel e lápis (Leung, 2017). Com ajuda da tecnologia, um professor que a usa com muita destreza, pode propor aos seus alunos tarefas que abordem processos matemáticos importantes, como por exemplo, a modelação de fenómenos físicos, químicos ou contabilísticos, que num ambiente sem o uso das tecnologia, seriam impossíveis ou muito limitadas (Albuquerque et al., 2006).

No ensino e aprendizagem dos conceitos de Cálculo é possível identificar na literatura a adoção predominante de calculadoras gráficas, *software* educacional e ambientes virtuais (Leung & Baccaglini-Frank, 2017; Mira-López, 2016; Slavícková, 2013; Tall et al., 2008; Villarreal, 1999). Esses estudos têm mostrado que o uso integrado dessas tecnologias digitais, quando bem planeado e executado, proporciona resultados muito satisfatórios, seja ao nível das aprendizagens e compreensão conceitual, seja ao nível do desenvolvimento dos processos de raciocínio matemático que incluem o desenvolvimento de conjeturas, generalizações, justificações e provas matemáticas. Esta tendência tem sido assinalada em grande parte por grupos de pesquisa em Educação Matemática (Leung, 2017).

Entretanto, verifica-se que um dos grandes desafios dos professores que lecionam matemática está em conseguir integrar, de forma inovadora, as tecnologias digitais na sua prática docente e, consequentemente, de se adaptarem às rápidas transformações que a informação sofre com a interação dos estudantes com as tecnologias (Albuquerque et al, 2006; Ponte, 2014). Sendo assim, os programas computacionais que permitem ao professor gerar aplicativos interativos, sem necessidade de prévios conhecimentos computacionais, e ao estudante uma fácil manipulação de controles e parâmetros, são ideais para promover o salto qualitativo no ensino e aprendizagem da Matemática (Leung & Baccaglini-Frank, 2017). Diversos estudos têm indicado que o *Software de Geometria Dinâmica* - DGS (sigla em inglês para *dynamic geometry software*) cumpre esse papel, contribuindo de forma positiva para a aprendizagem e compreensão dos conceitos matemáticos, incluindo os de limite e continuidade de funções (Aydos, 2015; Cheng & Leung, 2015; Dikovic, 2009; Slavícková, 2013; Trocki & Hollebrands, 2018).

Nesses estudos, o DGS tem sido considerado um recurso que auxilia na demonstração de propriedades ou teoremas associados às funções, sequências e séries, entre outros tópicos matemáticos; proporciona sentido ao que é estudado e estimula a aprendizagem; possibilita a integração dos conhecimentos adquiridos conectando-os com situações da realidade e estimulando a procura de novas aprendizagens; e permite a criação de novos tipos de problemas matemáticos que não poderiam ser tratados em salas de aula sem tecnologia, como, por exemplo, investigações dinâmicas de conceitos matemáticos. Ademais, favorece um ambiente de aprendizagem rico e eficiente, que não é possível num contexto de papel e lápis, pela possibilidade de criar soluções didáticas que permitam aos estudantes desenvolverem seu raciocínio matemático e alcançarem aprendizagens mais efetivas (Trocki & Hollebrands, 2018; Venturini & Sinclair, 2017; Yorganci, 2018).

Os DGS são ambientes computacionais que permitem gerar aplicativos dinâmicos e interativos contendo construções geométricas planas e espaciais, possibilitando a observação dos elementos e propriedades que mudam e aqueles que permanecem invariantes, através da exploração e movimentação dos elementos destas construções

(Venturini & Sinclair, 2017; Leung, 2017). Os mais referidos na literatura em Educação Matemática são o Cabri[5], GeoGebra[6], Geometry Sketchpad[7], Cinderella[8] (Leung, 2017).

No DGS, o mesmo conceito matemático pode ser apresentado em várias janelas interativas (por exemplo, DGS 2-D, DGS 3-D, Folha de cálculo), conjuntamente no mesmo écran, onde os elementos das representações (em cada janela) podem ser construídos para variar simultaneamente, permitindo que os efeitos destas variações, ao serem visualizadas pelos estudantes, lhes proporcione uma compreensão mais aprofundada do conceito matemático (Leung, 2017; Trocki & Hollebrands, 2018). A multiplicidade de recursos do DGS permite que os estudantes percebam fenómenos que não podem ser observados de outra forma. Por exemplo, os recursos que permitem a construção e alteração dinâmica de gráficos de diversas classes de funções, através da manipulação de controles simples criados para este fim, possibilita que os estudantes, ao observarem os efeitos destas alterações dinâmicas, formulem conjeturas, as testem experimentalmente e tentem comprová-las, compreendendo igualmente a necessidade do rigor e generalidade da prova matemática (Stylianides & Stylianides, 2005; Trocki & Hollebrands, 2018).

Um DGS que tem ganho cada vez mais relevância nas investigações em Educação Matemática é o GeoGebra. Este *software* possui um *interface* fácil de usar, contendo menus multilíngues, ícones que oferecem acesso fácil aos principais comandos geométricos e vetoriais, uma barra de entrada contendo uma lista de funções (polinomiais, racionais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, entre outras) e operadores pré-definidos que permite criar equações, coordenadas e gráficos das funções reais e um tutorial de ajuda. Ele também possui uma calculadora munida das operações elementares da Álgebra e das principais funções (Hohenwarter, Hohenwarter, Kreis & Lavicza, 2008). Estes recursos permitem ao professor elaborar *applets* com construções geométricas dinâmicas dos conceitos matemáticos, contendo pequenos controles para os seus parâmetros que, ao serem manipulados pelo estudante, produzem movimentos e transformações planas e/ou espaciais que lhes poderão ser úteis à compreensão desses conceitos (Dikovic, 2017; Yorganci, 2018). É um *software* de livre acesso, isto é, de

---

[5] *https://cabri.com/*
[6] *https://www.GeoGebra.org*
[7] http://www.dynamicgeometry.com/
[8] https://www.cinderella.de/tiki-index.php

aquisição e uso gratuito, através de *download* na *internet*. A figura 3.1 apresenta uma *applet* construída no GeoGebra.

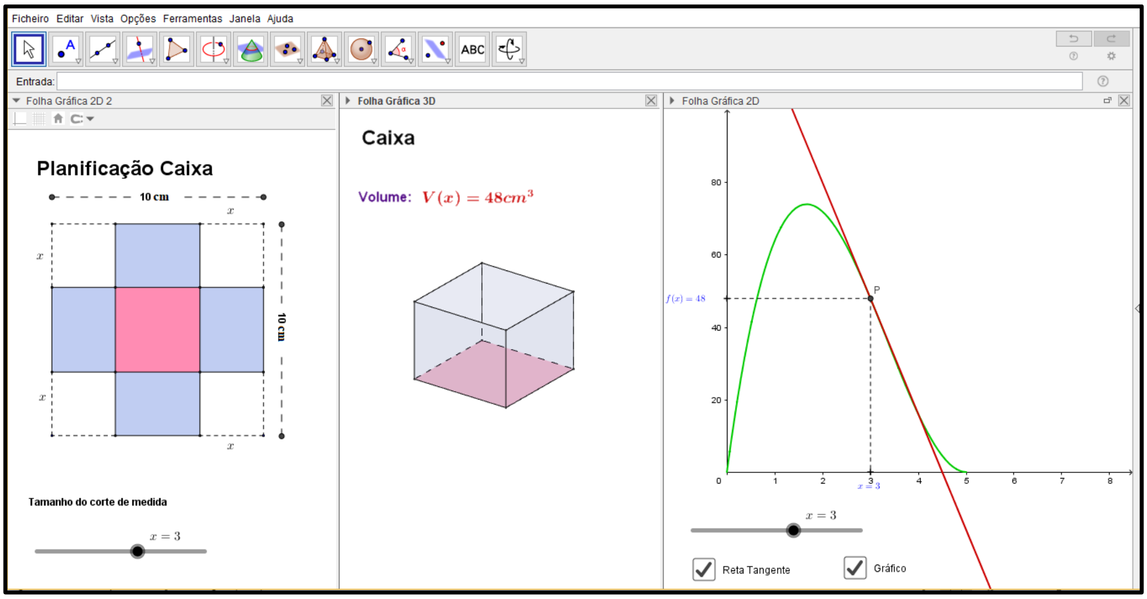


Figura 3.1 – Exemplo de *applet* construído no GeoGebra

Como recurso no ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos o GeoGebra pode ser usado como suporte à demonstração, como ferramenta de construção da matemática e na preparação de materiais instrucionais (Hohenwarter & Fuchs, 2004). Ademais, ele também pode ser usado para incentivar a experimentação, visualização e a descoberta no estudo de conceitos matemáticos, aspetos considerados importantes para a aprendizagem e compreensão conceitual do limite e continuidade de funções (Dikovic, 2009; Yorganci, 2018). Estas e outras potencialidades do GeoGebra têm levado muitos pesquisadores a considerá-lo como um recurso útil no ensino e aprendizagem dos conceitos de Cálculo (Alves, 2010; Arzarello & Manzone, 2017; Dikovic, 2009, 2017; Gnudi & Criscuolo, 2013; Hohenwarter et al., 2008; Slavícková, 2013; Yorganci, 2018), apontando igualmente algumas vantagens do seu uso. Por exemplo, segundo estes autores, o GeoGebra favorece:

- a criação e personalização de construções geométricas através da adaptação do *interface*, como por exemplo, alterando o tamanho da fonte, a qualidade dos gráficos, a cor, as coordenadas, a espessura e o estilo da linha, entre outras. Essas adaptações são fundamentais na análise do gráfico de funções;

- a criação, num mesmo ambiente, de construções numéricas, geométricas e/ou algébricas, que possibilitam a modificação dinâmica do comportamento das imagens de uma função e os registos numéricos destas modificações por meio de tabelas numéricas, expressões algébricas e gráficos. A exploração simultânea dessas construções possibilita ao estudante uma visualização e interpretação mais aprofundada dos conceitos do Cálculo, o que seria impossível de se trabalhar num contexto de ensino que privilegie apenas a exposição de conceitos;

- a animação de objetos das construções geométricas (pontos, gráficos, figuras, entre outros) que ajudam a criar situações que viabilizam a criação e reformulação de conjeturas matemáticas;
- a conexão entre construções geométricas bidimensionais e tridimensionais, possibilitando uma compreensão mais rica do conceito matemático;
- a criação, simulação e exploração de modelos matemáticos, viabilizando a integração entre os conhecimentos adquiridos e correlacionando-os com situações da realidade;

Esses autores têm indicado ainda que o uso do GeoGebra revela-se um recurso muito útil na construção de: noções intuitiva e formal dos conceitos do Cálculo, a partir do uso de construções dinâmicas de aproximações simultâneas $x \to x_0$ e $f(x) \to L$, $x \to x_0$ e $f(x) \to f(x_0)$ ou da noção de vizinhanças $x \in V_\delta(x_0)$ e $f(x) \in V_\varepsilon(L)$; conceito de assíntota ao gráfico de uma função (vertical, horizontal e oblíqua) através da exploração dinâmica do comportamento gráfico das imagens das funções; taxa de variação instantânea de uma função a partir de construção dinâmica da reta tangente aproximada por retas secantes; entre outros. Verifica-se ainda que o ambiente no GeoGebra é usado como um meio de visualização, verificação e exploração das figuras e símbolos algébricos, permitindo aos estudantes o reconhecimento de relações matemáticas associadas a diferenciação de funções polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas, a integração de Riemann de funções, entre outros aspetos.

Alguns destes estudos têm produzido resultados sobre as potencialidades e limitações do GeoGebra na aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade de funções reais. Rocha (2010) e Hohenwarter et al (2008) salientam que o GeoGebra favorece a visualização de diferentes representações (verbal, geométrica, algébrica e tabular) do limite e continuidade. Rocha (2010), que investigou o papel do GeoGebra na compreensão dos conceitos de limite, derivada e integral por estudantes de uma disciplina de Cálculo, indica que os recursos vetoriais que permitem a modificação dinâmica do traçado gráfico de uma função e os registos numéricos/algébricos destas modificações através de tabelas numéricas e/ou expressões algébricas, facilitam a interpretação de diferentes representações (geométrica, algébrica e tabular) do limite e continuidade e contribuem para o enriquecimento da visão bidimensional dos aspetos ligados a estes conceitos. Esta potencialidade é ressaltada também por Hohenwarter et al. (2008) que indicam que a construção dinâmica, no GeoGebra, da representação geométrica do declive da reta tangente ao gráfico de uma função como resultado da aproximação do declive da reta secante pode ajudar os estudantes a entenderem a conexão entre as retas secantes e tangentes, a importância do conceito de limite e do quociente diferencial $\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$ neste contexto.

De acordo com Dikovic (2017) e Alves (2010), o GeoGebra também favorece a visualização de definições e propriedades algébricas associadas ao limite e continuidade. Dikovic (2017) que utilizou o GeoGebra em aulas que se propunham promover a compreensão da noção de continuidade uniforme de funções, conclui que os recursos do GeoGebra que permitem a exploração dinâmica da representação geométrica da continuidade de funções, com registos assentes nas simbologias da sua definição formal, facilitaram a significação das simbologias algébricas da definição formal do conceito de continuidade e, consequentemente, a sua apreensão. Alves (2010), por sua vez, investiga o papel do GeoGebra na aprendizagem do limite e continuidade de funções em disciplinas de introdução ao Cálculo. Com base nos resultados do seu estudo, este autor conclui que o dinamismo das construções no GeoGebra contribuíram para que os estudantes pudessem compreender algumas propriedades de limite e funções contínuas, nomeadamente, o reconhecimento da condição da existência do *limite no ponto* $\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L\right)$ a partir da observação dinâmica dos comportamentos laterais do gráfico da função, e as propriedades de deslocamentos vertical $(f(x) = f(x) + b,\ b \in \mathbb{R} - \{0\})$ e horizontal $(f(x) = f(x + b),\ b \in \mathbb{R} - \{0\})$ de funções nos eixos coordenados, os quais foram facilitadas pelas deslocações dos gráficos das funções no GeoGebra.

Para além disso, Alves (2010) ressalta que o GeoGebra possibilita (i) a abertura para conjeturas a partir de gráficos de funções; (ii) um ambiente dinâmico contrastante com o ambiente estático presente, por exemplo, nos livros didáticos sem o recurso da tecnologia; (iii) melhor apreensão de noções intuitivas associadas ao limite e continuidade de funções, conceitos que frequentemente são apresentados de uma maneira formal; e (iv) uma mudança de postura dos estudantes que passam a mostrar uma atitude mais ativa e questionadora na resolução de tarefas em sala de aula. Este autor conclui que o uso do GeoGebra pode contribuir para um "repensar" do ensino de Cálculo e, assim, para um "redirecionar" da prática pedagógica de um professor de Matemática, com abordagens didáticas flexíveis e envolventes.

Aydo (2015), Gnudi e Criscuolo (2013), Öçal (2017) e Dikovic (2009), indicam que o GeoGebra possibilita a conexão entre diferentes representações dos conceitos de limite e continuidade. Aydos (2015), que investigou o impacto do GeoGebra na compreensão conceitual do limite e continuidade, centrando-se nas aprendizagens alcançadas pelos estudantes, ressalta que o ambiente de aprendizagem no GeoGebra, suportado por múltiplas representações dos conceitos, facilita a aprendizagem de aspetos mais abstratos destes conceitos, como por exemplo, procedimentos algébricos no de limite. O autor conclui que o GeoGebra pode ser uma ferramenta eficaz para o ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, como o Cálculo. Gnudi e Criscuolo (2013), que utilizaram o GeoGebra em atividades colaborativas de resolução de problemas e explorações envolvendo aspetos do conceito de limite de função, indicam igualmente que o GeoGebra fornece aos estudantes oportunidade de usar e correlacionar diferentes representações de funções (verbal, numérica, tabular, gráfica e algébrica), o que favoreceu o reconhecimento da existência de assíntota vertical e oblíqua ao gráfico de uma função e a sua relação com o tipo de descontinuidade de funções. Também Öçal (2017), que investigou o papel do GeoGebra no desenvolvimento do conhecimento de estudantes de nível superior numa disciplina de Cálculo, sobre os conceitos de funções e de derivadas, salienta que o GeoGebra ajudou os estudantes a realizarem conexões entre as representações algébricas e gráficas de funções, e facilitou a interpretação tanto das funções representadas quanto das suas respectivas derivadas.

Num outro estudo, Dikovic (2009) conclui que os recursos do GeoGebra que permitem a exploração gráfica, algébrica ou tabular de uma ampla *gama* de tipos de funções reais possibilitou aos estudantes realizarem conexões entre as representações simbólica (algébrica) e visual (geométrica e tabular) da continuidade de funções, facilitando a análise e conclusão sobre a (des)continuidade de uma função num ponto e a construção de exemplos de diferentes tipos (removíveis e não removíveis) de descontinuidades de funções.

Slavicková (2013) indica que o GeoGebra auxilia na dedução e demonstração de propriedades matemáticas dos conceitos de limite e continuidade. No seu estudo, a autora utilizou o GeoGebra em aulas que propunham promover aprendizagens sobre demonstrações matemáticas apoiadas no conceito de limite de funções. Baseada nos resultados obtidos, ela conclui que a exploração de comandos do GeoGebra, que possibilitam aproximações gráficas e simulação de resultados numéricos, proporciona ao estudante condições para descobertas e formulação de conjeturas e auxilia na criação de estratégias de suas demonstrações. Para Slavícková (2013), este ambiente de aprendizagem pode estimular os estudantes a procurar uma aprendizagem mais aprofundada e um maior envolvimento durante as aulas. A formulação de conjeturas e provas matemáticas favorecidas por explorações no GeoGebra também são referidas em Arzarello e Manzone (2017) que desenvolveram um planímetro[9] virtual no GeoGebra e o utilizaram para simular e explorar a noção de infinitesimais no cálculo de medidas de áreas. Os autores salientam que os recursos do GeoGebra que possibilitaram testes experimentais de aproximações de medidas das áreas, permitindo aumento da extensão decimal do valor da área calculada e aumento/diminuição de zoom na visualização geométrica de gráficos, foram fundamentais para que os estudantes conseguissem provar uma medição de área desejada e concluíssem sobre a raiz da definição de limite e infinitesimal.

Todavia, o GeoGebra possui limitações que podem ser exploradas positivamente. As limitações aqui consideradas não se referem às causadas por falta de habilidade ou familiaridade com o uso da tecnologia, ou problemas de incompatibilidade do GeoGebra com determinadas configurações do computador, mas sim limitações matemáticas ou visuais, apresentadas por recursos do GeoGebra, e que podem restringir ou dificultar a

[9] O *planímetro* é um instrumento para desenho técnico usado na medição de área de uma superfície plana arbitrária.

compreensão de aspetos associados aos conceitos de limite e continuidade de funções. Estas limitações são verificadas na versão do GeoGebra 5, que foi utilizada neste estudo.

Rocha (2010) sinaliza que a representação do gráfico de algumas funções descontinuas (descontinuidade removível[10]), por exemplo, a função $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$, configura-se numa limitação do GeoGebra pelo facto deste *software* não permitir visualizar o ponto de descontinuidade no gráfico dessas funções, seja pela representação clássica de uma 'bolinha aberta', por uma interrupção no traçado do gráfico ou mesmo utilizando o recurso de zoom. Desta forma, o gráfico não reflete todas as informações da função representada e, portanto, a análise da função exclusivamente pelo recurso da visualização é limitada podendo levar a conclusões erradas (Rocha, 2010). Este autor sinaliza que esta limitação do GeoGebra contribuiu para que vários estudantes de seu estudo não fossem capazes de reconhecer a descontinuidade da função $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$ pela análise de seu gráfico. Uma forma de compensar esta limitação do GeoGebra, segundo Rocha (2010), seria permitir que os estudantes explorassem simultaneamente a representação gráfica e tabular destas funções. Uma vez que na representação tabular o valor da imagem da função no ponto de descontinuidade é simbolizado por $\boxed{?}$ (indicando assim que nenhum valor numérico é assumido por ela). Através desta exploração simultânea é possível estabelecer a conexão destas representações (gráfica e tabular) e proporcionar uma análise mais completa da descontinuidade da função.

Outra limitação do GeoGebra consiste em pequenas incorreções na representação das coordenadas de pontos $(x, f(x))$ quando são considerados valores de x muito grandes $(x \to \infty)$, apresentadas na sua janela da folha algébrica, e que pode provocar interpretações erradas sobre $\lim_{x\to\infty} f(x)$ de algumas funções. Esta limitação do GeoGebra contribuiu para que alguns estudantes do estudo de Alves (2010) não conseguissem, incialmente, reconhecer a existência do limite $\lim_{x\to\infty} e^x$. Para concluir sobre o valor do $\lim_{x\to\infty} e^x$ os estudantes realizaram simulações de valores de x e visualizavam os resultados das imagens $f(x)$ na indicação da coordenada do ponto $\left(x, f(x)\right)$ na folha algébrica. Ao considerar um valor de x muito alto, por exemplo 1000, o GeoGebra apresentava a

[10] A função f tem uma descontinuidade removível em x_0 se f não é contínua em x_0 e admite a existência $\lim_{x\to x_0} f(x)$ (Dikovic, 2009).

informação *"não definido(a)"* no lugar das coordenadas do ponto $(x, f(x))$ causando dúvida quanto ao valor do limite (figura 3.2). Uma proposta de Alves (2010) para resolver a referida limitação do GeoGebra consistiu em solicitar aos estudantes que analisassem o comportamento do gráfico da função $f(x) = e^x$, recorrendo-se ao recurso de '*zoom*', a fim de concluir sobre o valor do limite.

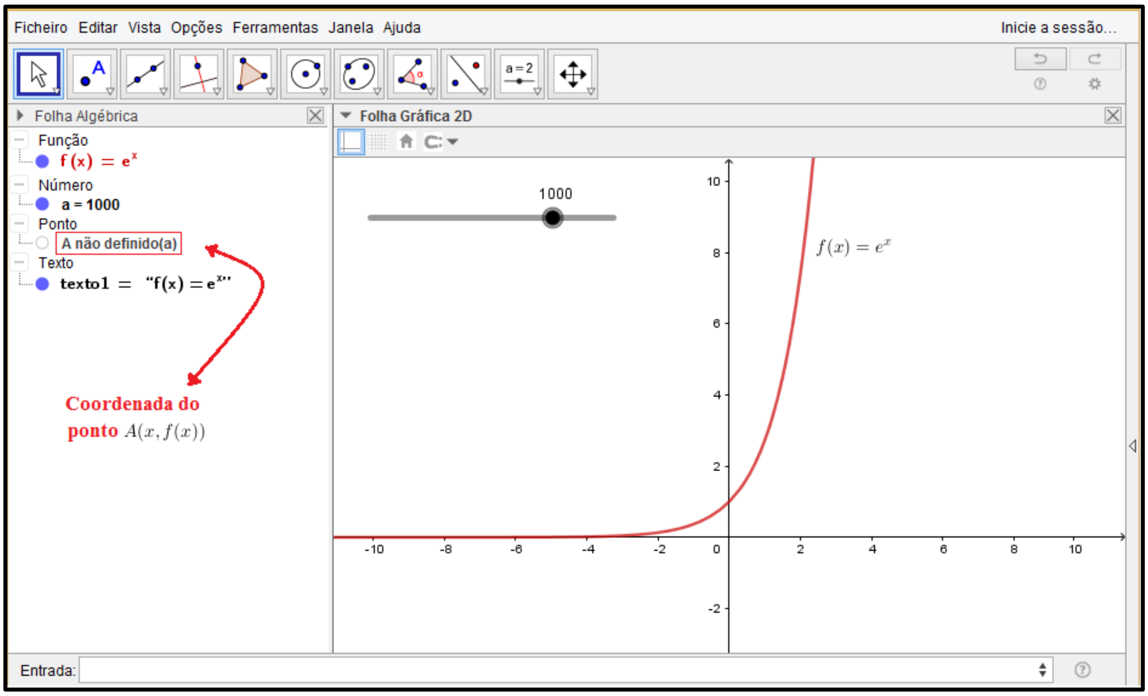


Figura 3.2 – Ilustração de limitação do GeoGebra, conforme Alves (2010)

O conhecimento, por parte do professor (pesquisador), destas e de outras limitações é importante para a criação de *applets* no GeoGebra que visem promover a compreensão conceitual do limite e continuidade, permitindo-lhe realizar antecipadamente pequenos ajustes nestas construções geométricas a fim de corrigir os erros e evitar obstáculos de natureza tecnológica à compreensão destes conceitos.

Assim, por tudo exposto, verifica-se que o GeoGebra pode ser usado para incentivar a visualização do limite e continuidade de funções, a conexão e correlação entre suas diferentes representações e os processos de raciocínio matemático a eles associados, aspetos que são considerados importantes à compreensão desses conceitos matemáticos (Goldin, 2002; Karatas et al., 2011).

Capítulo 4

A compreensão de limite e continuidade de funções

Neste quarto capítulo, apresento um enquadramento teórico sobre a compreensão dos conceitos de limite e continuidade de funções. Começo por clarificar o que se entende por compreensão em Matemática e caracterizar a estrutura conceitual que dá suporte a uma aprendizagem com compreensão. Discuto essa compreensão a partir de três dimensões, nomeadamente, os significados atribuídos aos conceitos, os quais revelam conceção sobre eles, o uso de suas diferentes representações e a resolução de problemas que os envolve. Nesse sentido, procuro descrever o suporte teórico para o quadro de análise de dados.

4.1. A compreensão em Matemática

É consensual o entendimento que a formação inicial deve providenciar, ao futuro professor de Matemática, uma compreensão aprofundada da Matemática, uma vez que ele irá ensiná-la, o que envolve desenvolver um conhecimento com compreensão dos seus conceitos, procedimentos e estruturas (Albuquerque et al., 2006; CBMS, 2012). Os futuros professores que revelem fragilidades nesse conhecimento, tendem a ter uma capacidade limitada de ensinar e conduzir os estudantes ao desenvolvimento de compreensão conceitual ou relacional da Matemática (Ponte & Chapman, 2008).

O termo compreensão na aprendizagem da Matemática não é consensual entre os autores da Educação Matemática. Não é algo que se tem ou não porque está sempre em desenvolvimento (NCTM, 2000). Sendo reconhecidamente um dos grandes objetivos da Educação Matemática (Simon, 2017), a compreensão em Matemática tem sido abordada por vários autores que discutem a construção do conhecimento (Carpenter & Lehrer, 1999; Domingos, 2003; Hiebert & Carpenter, 1992; Sierpinska, 1994; Simon, 2017; Skemp, 1976). Para estes autores, a compreensão é considerada um pilar fundamental no processo de ensino e aprendizagem e envolve um conhecimento integrado de relações, significados e diferentes representações de um conceito matemático. Quando necessário, envolve ainda a conexão de diferentes conceitos, dentro da mesma área de conhecimento ou entre outras áreas, devendo ser desenvolvida pelos estudantes desde o início do seu processo de aprendizagem.

A importância de uma aprendizagem da Matemática com compreensão é enfatizada em diversos documentos orientadores em Educação Matemática (e.g. Albuquerque et al., 2006; NCTM, 2000). Além do mais, é suportada em resultados de investigação que salientam que os estudantes que aprendem com compreensão são capazes de explicar significados associados aos conceitos matemáticos, de operar com as suas diversas representações, de justificar procedimentos e de aplicar os conhecimentos adquiridos na resolução de problemas matemáticos. Os estudantes que aprendem sem compreensão, concebem cada tópico matemático de forma isolada, sem relação com outros tópicos, dificultando a resolução de problemas sem instrução explícita e a aprendizagem de novos conceitos (Carpenter & Lehrer, 1999; Domingos, 2001).

Uma definição de *compreensão* que se adequa aos objetivos da presente pesquisa é apresentada por Skemp (1976), que considera duas formas de compreensão dos conceitos matemáticos: *compreensão instrumental* ou *compreensão relacional*. De acordo com o autor, a compreensão pode ser *instrumental*, caracterizada pela memorização de regras ou métodos que permitem o seu uso para resolver certos problemas através de simples aplicação de métodos conhecidos. Pode ainda ser *relacional*, que consiste na conceção de uma estrutura conceitual rica e integrada, permitindo relacionar os significados, os procedimentos e as representações, e a sua mobilização na resolução de problemas. Portanto, é essa estrutura conceitual que permite uma aprendizagem com compreensão. Por esse motivo, pesquisas anteriores sobre a aprendizagem do limite e continuidade de funções têm indicado que tanto os significados a eles atribuídos, quanto o uso de suas diferentes representações e a resolução de problemas que os envolvem, constituem elementos que apoiam a investigação sobre a compreensão dos estudantes destes conceitos (Domingos, 2003; Gutiérrez-Fallas & Henriques, 2017; Juter, 2006; Karatas et al., 2011; Mira-López, 2016; Nair, 2010; Swinyard & Larsen, 2012; Tall & Vinner, 1981).

4.2. Os significados e a compreensão de limite e continuidade

As conceções dos estudantes sobre um conceito matemático (conceções matemáticas) têm uma natureza essencialmente cognitiva. Por um lado, são indispensáveis para estruturar o sentido que é dado ao conceito. Por outro lado, atuam como obstáculo à aquisição de novos conhecimentos, limitando a aprendizagem de novos conceitos e a sua compreensão (Ponte, 1992). Assim, uma conceção matemática pode produzir respostas corretas num contexto específico, mas, em outros contextos, dar origem a respostas falsas, sendo uma das formas de exprimir a compreensão matemática (Simon, 2017). Para este autor, as conceções são verificadas a partir de uma descrição das habilidades, bem como de limitações observadas nos estudantes em termos de seus conhecimentos sobre o conceito matemático.

A literatura sobre o ensino e aprendizagem de limite e continuidade de funções inclui diferentes terminologias para classificar as conceções matemáticas dos estudantes sobre esses conceitos. Para Cottrill et al. (1996), as conceções matemáticas podem ser classificadas em intuitivas ou formais. As conceções intuitivas são caracterizadas por um conhecimento das noções intuitivas, como por exemplo, a conceção intuitiva de continuidade é associada a uma função cujo gráfico pode ser desenhado sem levantar o lápis do papel (Sealey et al., 2014; Tall & Vinner, 1981), enquanto que as conceções formais, descrevem um conhecimento matemático mais próximo do que é aceite pela comunidade matemática, como é o caso da conceção correta da definição formal de limite (Cottrill et al., 1996; Tall & Vinner, 1981). Cornu (1991), denomina de conceção dinâmica do limite, o conhecimento do limite no ponto como um processo de aproximação a um ponto. Williams (1991) chama de conceção de aproximação aquela em que o limite serve como uma aproximação para algo, ou como uma aproximação para o valor de uma imagem da função. Para Przenioslo (2004), os alunos apresentam uma conceção de vizinhança quando associam o limite ao comportamento convergente da função, numa região delimitada por uma fronteira e que contém o ponto de onde se deseja verificar o limite. Este autor também identificou no seu estudo, estudantes que apresentaram conceções de algoritmo, isto é, centradas na aplicação de algoritmos memorizados para concluir sobre a existência do limite.

Estas e outras descrições apoiam-se, frequentemente, na teoria de Tall e Vinner (1981) do *Conceito-Imagem (Concept Image)* e *Conceito-Definição (Concept*

Definition), para explicar as conceções dos estudantes sobre limite e continuidade. Segundo estes autores, o *conceito-imagem* descreve a estrutura cognitiva total, associada ao conceito matemático e incluindo todas as imagens mentais, propriedades e processos, sendo construído e desenvolvido por meio de experiências de todos os tipos, e atualizada à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. Associada a esta estrutura, Tall e Vinner (1981) denominam por *conceito-imagem evocado* a parte do *conceito-imagem* ativada num dado contexto, não sendo necessariamente tudo o que o estudante sabe sobre o conceito.

Tall e Vinner (1981) salientam, ainda, que conceitos imagem[11] conflitantes podem ser evocados pelo estudante, do seu *conceito-imagem,* ao ser desafiado a raciocinar sobre determinado conceito matemático. Por isso, todos os atributos mentais associados ao conceito matemático (representações, propriedades, símbolos, entre outros), sejam eles conscientes ou inconscientes, devem ser por ele experimentados no desenvolvimento de seu *conceito-imagem*, a fim de torná-lo rico e apropriado ao conceito em questão, uma vez que a falta desses atributos pode levar a futuros conflitos (Tall & Vinner, 1981).

Por exemplo, o conceito de assíntota horizontal ao gráfico de uma função f é geralmente introduzido no ensino de limite de funções, para designar a reta horizontal 'imaginária' à qual o gráfico da função se aproxima, na medida em que os valores $x \in D_f$ tendem para o infinito. Alguns manuais de ensino de Cálculo apresentam como exemplo da representação geométrica da assíntota horizontal, uma reta que 'limita' a passagem do gráfico de uma função, tal como os casos apresentados na figura 4.1.

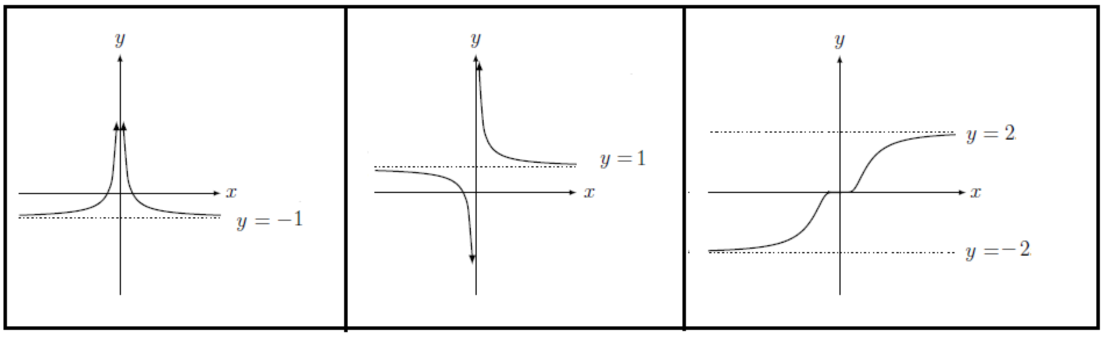


Figura 4.1 – Exemplos de assíntota horizontal ao gráfico de uma função que limita a passagem do gráfico

[11] Neste estudo, o termo conceitos imagem (sem hífen) é usado para descrever os elementos do *conceito-imagem evocado* e *conceito-definição* (Tall & Vinner, 19981) do estudante para comunicar sobre um conceito matemático.

A visualização desses exemplos pode conduzir o estudante a construir conceitos imagem sobre a assíntota horizontal como uma reta que 'impede' a passagem da curva, na medida em que x cresce infinitamente. Para o estudante, este entendimento torna-se parte do seu *conceito-imagem* sobre assíntotas horizontais e pode causar dificuldades posteriormente. Isso pode ocorrer quando o evocar para resolver um problema em que tenha de decidir sobre a existência de assíntota horizontal ao gráfico de uma função, no qual a reta é cruzada pelo gráfico da função uma infinidade de vezes. Tal fenómeno pode ser observado na figura 4.2, em que o gráfico da função cruza a assíntota horizontal, oscilando cada vez menos quando $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$. Na figura é possível verificar que o gráfico da função f cruza a assíntota horizontal $y = -2$ uma infinidade de vezes.

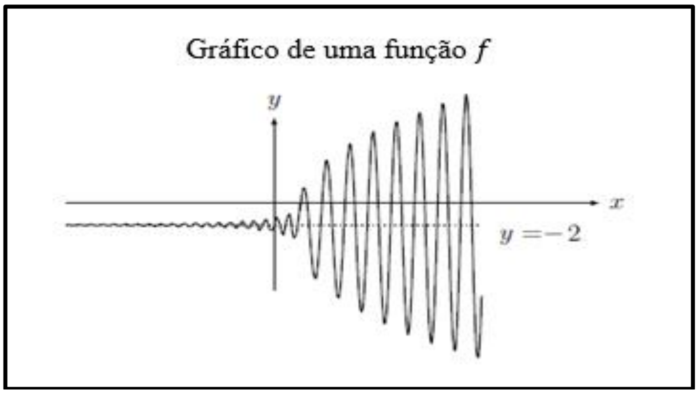


Figura 4.2 – Exemplo de gráfico de função cruzando uma assíntota horizontal, oscilando cada vez menos

Tall e Vinner (1981) também definem por *conceito-definição* uma descrição verbal do conceito, o qual pode ser ensinado ao estudante ou construído por ele, aperfeiçoado ao longo do tempo, além da possibilidade de ser diferente do que é aceite pela comunidade matemática, nomeadamente, uma definição formal. Para esses autores, um *conceito-definição* pode ser inexistente, caso não tenha sido formado ou se for esquecido pelo estudante. Se existir, pode ser inativo, como é o caso da memorização dos estudantes de determinadas definições de conceitos. O *conceito-definição* pode ser formado a partir do momento em que o estudante é questionado e levado a explicar um determinado conceito, e descreve verbalmente o seu *conceito-imagem evocado* (Tall & Vinner, 1981). Imagine-se, por exemplo, que um estudante seja questionado sobre o que entende por uma função contínua e apresenta a seguinte resposta: 'É uma função cujo traçado do seu gráfico é desenhado sem tirar o lápis do papel' (*conceito-definição*). De acordo com a teoria cognitiva de Tall e Vinner (1981), este *conceito-definição* revela conceitos imagem mais salientes no *conceito-imagem* desse estudante, assimilados ou memorizados no momento em que foi ensinado e que o evocou para explicar o conceito.

Tall e Vinner (1981) também esclarecem que é possível que alguma parte do *conceito-imagem evocado* entre em conflito com outras partes do *conceito-imagem* ou mesmo com o *conceito-definição*, resultando em um *potencial fator de conflito*. Esses conflitos podem ser ou não conscientes e causar dificuldades à compressão de conceitos mais formais. No caso de algum fator de conflito ser evocado em situações que venha a causar conflitos cognitivos, o tal fator tornar-se-á em um *fator de conflito cognitivo*. Em outro estudo, Vinner (1991) salienta que apenas quando *potenciais fatores de conflito* são evocados é que se percebe algum sentido real de conflito ou de confusão, que se traduzem em um *conflito cognitivo*. Para exemplificar tal situação, imagine-se que um estudante tenha que responder à seguinte questão: 'Uma função pode cruzar a assíntota horizontal uma infinidade de vezes. O mesmo pode acontecer para a assíntota vertical? Porquê?' Para responder, ele pode ativar conceitos imagem relacionados à assíntota horizontal, que pode ser cruzada uma infinidade de vezes (*potencial fator de conflito*) e concluir de forma errada que o mesmo pode acontecer para a assíntota vertical (*fator de conflito cognitivo*).

De acordo com a teoria de Tall e Vinner (1981), esse *conceito imagem evocado* configura-se num *conflito cognitivo* para a compreensão do conceito de assíntota vertical, uma vez que ao ser ativado, num contexto que não permitia a oscilação do comportamento assintótico da função, conduziu a uma conclusão errada. Neste caso, somente uma parte do *conceito-imagem* de assíntota ao gráfico de uma função foi ativada, deixando de lado a parte desse *conceito-imagem* relacionada à noção de uma função. Essa última parte do *conceito-imagem* de assíntota ao gráfico de uma função seria suficiente para que o estudante identificasse a incorreção da sua conclusão, tal como ilustrado na figura 4.3.

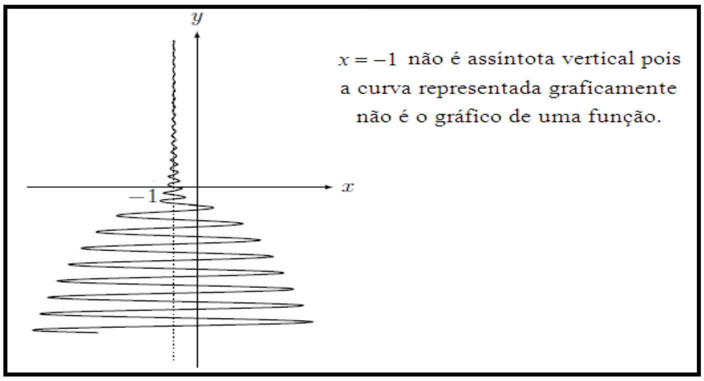


Figura 4.3 – Justificação do gráfico de uma função não poder cruzar a assíntota vertical uma infinidade de vezes

Os *significados* são usados na Educação Matemática para analisar a compreensão dos estudantes por resultarem de aspetos por eles mobilizados dos seus *conceito-imagem evocado* e *conceito-definição*, os quais, por sua vez, revelam a sua conceção sobre os conceitos matemáticos. Os significados podem ser evidenciados a partir de um conjunto de respostas verbais, gráficas, simbólicas ou esquemáticas, entre outras, sobre o conceito matemático (Domingos, 2003; Fernández-Plaza et al., 2013; Juter, 2006).

Os significados podem ser corretos, caracterizados por conceitos imagem corretos e apropriados à situação em questão. Por conseguinte, revelam o sentido correto que é dado ao conceito matemático, a exemplo dos conceitos imagem corretos do limite no ponto como resultado da implicação baseada na noção de vizinhanças $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$ e que é necessária à compreensão da definição formal de limite (Domingos, 2003; Swinyard & Larsen, 2012). Eles também podem inexistir ou serem conflituantes, quando conceitos imagem são evocados pelos estudantes de forma desconexa com o *conceito-definição*. Assim, revelam-se incompreensões que podem atuar como obstáculo à aquisição de novos conhecimentos, limitando a aprendizagem de novos conceitos e sua compreensão (Tall & Vinner, 1981). Tal facto exemplifica-se na incompreensão do uso dos quantificadores e sua ordem na definição formal, ou conceção clássica de continuidade como a função cujo gráfico pode ser desenhado com o lápis sem levantá-lo, o que pode conduzir ao erro na análise de funções racionais que são contínuas em todo o seu domínio, mas que possuem interrupções (Juter, 2006; Tall & Vinner, 1981).

As diversas tipologias apresentadas na literatura sobre a conceção do conceito de limite de uma função permitem uma categorização dos seus principais significados, nomeadamente, o limite como: (i) resultado de um processo de aproximação ao objeto; (ii) um processo dinâmico; (iii) a imagem do ponto através da função; (iv) resultado de um processo de aproximação inalcançável da $f(x)$, quando $L \neq f(x_0)$; (v) resultado da igualdade dos limites laterais; (vi) resultado de correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança; (vii) o declive da reta tangente ao gráfico da função; (viii) condição de existência de assíntota vertical ao gráfico da função; e (ix) condição de existência de assíntota horizontal ao gráfico da função.

O significado de limite como *resultado de um processo de aproximação ao objeto* ($x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to L$) descreve uma conceção dinâmica do conceito de limite (Fernández-Plaza et al., 2013; Mira-López, 2016). Nesse sentido, ele é revelado na descrição do limite no ponto como o valor resultante da aproximação das imagens $f(x)$ da função f, na medida em que os valores x do seu domínio se aproximam do ponto x_0, ou do declive da reta tangente ao gráfico de uma função como resultado da aproximação do declive da reta secante (Biza & Zachariades, 2010; Fernández-Plaza et al., 2013). Saliento ser muito comum o uso de termos como 'se aproxima' e 'tende para' para expressar essa conceção sobre o limite de funções. Este significado tem sido mobilizado pelos estudantes, com maior frequência, na interpretação da noção de limite quando analisam existência do limite no ponto, limite infinito ou limite no infinito, e do comportamento assintótico (vertical e horizontal) de uma função (Fernández-Plaza et al., 2013; Mira-López, 2016; Williams, 1991).

No entanto, essa conceção correta do conceito de limite pode configurar-se em um *fator de conflito cognitivo* (Tall & Vinner, 1981), ao ser mobilizado para decidir sobre se o limite é alcançado ou não pela função. Em vista disso, estabelecem-se novos significados do limite, 'escondidos' no *Conceito-Imagem*, nomeadamente, o limite associado a *um processo dinâmico* (Celestino, 2008; Cornu, 1991). Segundo Cornu (1991), grande parte dos estudantes quando são desafiados a decidir se o limite no ponto (L) é alcançado pela função costumam assumir ser esse um objeto matemático que se aproxima a um ponto x_0 ($L \to f(x_0)$, sendo, portanto, inalcançável ($f(x) \neq L$) quando f não está definida em x_0. Esta mesma conceção do limite é verificada no estudo de Celestino (2008), o qual indica que vários estudantes, ao explicarem o significado da simbologia $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, apresentam dificuldades em perceber que o "limite é" e a "função se aproxima", concluindo que o limite se aproxima.

Outro significado do conceito de limite consiste em associar o limite no ponto à *imagem do ponto através da função*, o qual descreve uma conceção limitada desse conceito, válida apenas para as funções contínuas no respetivo ponto. Essa conceção tem sido considerada uma das causas de dificuldades, no reconhecimento: da existência do limite em um ponto x_0 que não pertence ao domínio da função, da indeterminação $\frac{0}{0}$ no cálculo algébrico do limite ou de assíntotas verticais ao gráfico de uma função racional (Gutiérrez-Fallas & Henriques, 2017; Juter, 2006; Messias & Brandember, 2015).

Também se verifica, na literatura, a atribuição de significado do limite como *resultado da igualdade dos limites laterais*, caracterizada por uma conceção correta do limite no ponto baseada na igualdade nos comportamento laterais da função em um ponto

x_0 $\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)\right)$, o qual consiste na condição da existência do limite no ponto (Gutiérrez-Fallas & Henriques, 2017; Juter, 2006;). Essa conceção correta do limite é necessária ao cálculo algébrico do limite de funções, cujos comportamentos laterais em torno de um ponto x_0 são descritos por expressões analíticas diferentes (Juter, 2006).

O significado do limite como *resultado de correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança* descreve uma conceção correta do conceito de limite em termos das noções de vizinhanças $x \in V_\delta(x_0)$ e $f(x) \in V_\varepsilon(L)$, sendo fundamental à compreensão da definição formal de limite (Cottrill et al., 1996; Swinyard & Larsen, 2012). Essa conceção é revelada, por exemplo, na interpretação correta da expressão algébrica da definição formal do limite no ponto, a qual abrange explicação das simbologias $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ em termos das vizinhanças $V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$, reconhecimento do papel e ordem dos quantificadores nessa expressão algébrica e conclusão do limite como resultado da implicação $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$. Ademais, também ocorre na tradução formal da continuidade de uma função assente na definição formal de limite (Cottrill et al., 1996; Domingos, 2003; Swinyard & Larsen, 2012).

O significado do conceito de limite como *condição de existência de assíntota vertical ao gráfico da função* descreve uma conceção correta do limite infinito, caracterizada por relacioná-lo à existência de assintota vertical ao gráfico da função no ponto $x = x_0$ (Maurice, 2000; Nair, 2010). Essa conceção é fundamental ao estudo do comportamento de uma função e traçado do seu gráfico, numa vizinhança dos pontos a partir da qual não é definida (Maurice, 2000). Todavia, é possível que conceitos imagem conflituantes sejam evocados pelos estudantes na análise do cálculo do $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{k}{0}$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, gerando obstáculos ao reconhecimento da assíntota vertical ao gráfico de uma função. Isso verifica-se no estudo de Maurice (2000), em que a conceção do numeral zero como 'nada' conduziu alguns estudantes do seu estudo ao significado da divisão por zero como algo inexistente, impedindo-os de reconhecerem a existência de assíntotas verticais ao gráfico de uma função racional no ponto $x = x_0$.

O significado do conceito de limite como *condição de existência de assíntota horizontal ao gráfico da função* descreve uma conceção correta do limite no infinito, caracterizada por relacioná-lo à existência de assíntota horizontal ao gráfico da função, quando $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$, sendo fundamental à compreensão do comportamento global do gráfico de uma função (Maurice, 2000; Nair, 2010). Salienta-se, contudo, que quando conceitos imagem conflituantes são evocados pelos estudantes na análise e resolução do cálculo algébrico de limite no infinito, tais termos podem impedi-los de reconhecer uma possível assíntota horizontal ao gráfico de uma função. À luz disso, Maurice (2000) aponta em seu estudo que alguns estudantes que concebiam o termo *infinito* como um conjunto de números 'infinito' ou mesmo um processo infinito, concluíram no cálculo do limite $\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ que a indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$ resultava em ∞ $\left(\frac{\infty}{\infty} = \infty\right)$ e justificaram a inexistência de assíntota horizontal ao gráfico da função, mesmo quando, através de manipulação algébrica, se podia obter $\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = L$, $L \in \mathbb{R}$.

Já o significado do conceito de limite associado ao *declive da reta tangente ao gráfico da função* descreve uma conceção correta da taxa de variação instantânea de uma função caracterizada por associá-la ao declive da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto, que, por sua vez, corresponde à interpretação geométrica do conceito de derivada de uma função (Biza & Zachariades, 2010; Orts et al., 2016). Essa conceção do conceito de limite é necessária à resolução de problemas de otimização, que envolve o cálculo de máximo ou mínimo de uma função, cujos pontos a reta tangente apresenta declive nulo (Malaspina & Font, 2010)

As conceções corretas e adequadas de reta tangente ao gráfico de uma função, nomeadamente, como a melhor aproximação linear a uma curva ou como o limite das retas secantes, são referidas como fundamentais no estudo da taxa de variação instantânea de uma função, e parece favorecer a referida conceção do conceito de limite associado a taxa de variação instantânea (Biza & Zachariades, 2010; Orts et al., 2016). Entretanto, a conceção de reta tangente como a reta que toca a curva em apenas um ponto, proveniente de conhecimentos adquiridos em estudo da reta tangente a um círculo, pode gerar obstáculos à conceção correta do conceito de limite relacionado à *taxa de variação instantânea* de uma função. Esta situação verifica-se quando os estudantes têm que considerar a reta tangente num ponto de inflexão, num ponto de bico ou quando esta reta coincide com o gráfico da função (Biza & Zachariades, 2010).

Relativamente aos principais significados atribuídos pelos estudantes ao conceito de continuidade de uma função, é possível alocá-los em seis categorias. São elas: (i) a função cujo gráfico não possui interrupções; (ii) a função que a cada ponto do seu domínio associa uma imagem; (iii) a função definida por expressão analítica simples; (iv) resultado da igualdade $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; (v) associado às funções contínuas preconcebidas; (vi) associada à existência do limite e (vii) resultado da definição formal de limite no ponto.

O significado de função contínua como *a função cujo gráfico não possui interrupções* descreve uma conceção intuitiva de uma função, como aquela que o seu gráfico não permite a existência de 'lacunas', podendo ser traçado sem que se tire o lápis do papel (Sealey et al., 2014; Tall & Vinner, 1981). Saliento ser muito comum a utilização de expressões verbais como "*não há interrupção*", "*não tem buracos*", "*comportamento uniforme*" e "*não pula*" para traduzir essa conceção (Fernández-Plaza et al., 2013; Messias & Brandemberg, 2015; Nair, 2010; Tall & Vinner, 1981).

Verifica-se, igualmente, na literatura, a atribuição de significados à função contínua como aquela que *a cada ponto do seu domínio associa uma imagem*, o qual descreve uma conceção parcial do conceito de continuidade da função com base na noção do conceito de função, isto é, conceção de função contínua associada à existência de uma imagem $f(x)$ para cada ponto $x \in D_f$ (Gutiérrez-Fallas & Henriques, 2017; Nair, 2010). É fundamental considerar, ainda, a função *definida por expressão analítica simples*, o qual descreve uma conceção limitada de função contínua como aquela representada por uma fórmula algébrica que não admite partições do seu domínio expresso por diferentes expressões analítica $\left(\text{ex. } f(x) = \begin{cases} x & se\ x > 0 \\ x^2 & se\ x \leq 0 \end{cases}\right)$ (Juter, 2006; Tall & Vinner, 1981).

Esses significados descrevem conceções intuitivas ou espontâneas (Cornu, 1991) do conceito de continuidade de funções que ocorrem antes da sua aprendizagem formal e configuram-se em *potenciais fatores de conflito* que podem entrar em *conflito cognitivo* com a definição formal de continuidade (Cornu, 1991; Tall & Vinner, 1981). Esses *potenciais fatores de conflito* são evidenciados, por exemplo, na análise da continuidade da função da função $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$, a qual é contínua em todo o seu domínio, mas que possui interrupção no seu gráfico em $x = 0$, ou ainda da função $f(x) = \begin{cases} x & se\ x > 0 \\ x^2 & se\ x \leq 0 \end{cases}$ que é contínua, embora seja definida por uma expressão analítica com dois ramos (Tall & Vinner, 1981).

O significado de função contínua como resultado da *igualdade* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ descreve uma conceção correta do conceito de continuidade de funções com base na verificação dos três critérios de sua existência, nomeadamente: *i)* $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$; ii) $\exists f(x_0)$; e iii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (Messias & Brandember, 2015; Sealey et al., 2014), os quais constituem elementos que descrevem a definição informal de continuidade no ponto (Tall & Vinner, 1981). Essa conceção é importante para a aplicação do conceito de continuidade no extremo de um intervalo fechado na reta real $[a, b]$, na qual apenas a análise de limite lateral é necessária para decidir a (des)continuidade da função, nomeadamente, $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ ou $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ (Sealey et al., 2014).

Entretanto, conceitos imagem conflituantes associados a essa conceção do conceito de continuidade podem gerar possíveis *conflitos cognitivos* à sua aprendizagem, tal quando apenas conceitos imagem associados à existência do $\lim_{x \to x_0} f(x)$ são mobilizados para analisar a continuidade de uma função. Isto se verifica no estudo de Nair (2010), em que alguns estudantes concebiam que para uma função ser contínua em $x = x_0$ era suficiente que a igualdade dos limites laterais em $x = x_0$ fosse satisfeita. Desta forma, revelam ter atribuído significado à continuidade associado a *existência do limite no ponto*.

Outro significado da continuidade de uma função consiste em associá-la às *funções contínuas preconcebidas*, o qual descreve uma conceção do conceito de continuidade de funções com base no reconhecimento de que a função correspondente pertence a uma família de funções contínuas. Essa conceção é fundamental, por exemplo, na análise da continuidade de funções compostas, que envolve combinação de diversos tipos de funções, ou mesmo da continuidade de uma função num intervalo aberto cuja expressão analítica é conhecida (Lima, 2016).

Por fim, o significado de função contínua como *resultado da definição formal de limite no ponto* descreve uma conceção formal do conceito de continuidade com base nas simbologias da definição formal de limite no ponto (L), tomando $L = f(x_0)$. Essa conceção é fundamental às demonstrações das propriedades de funções contínuas, sendo revelada, por exemplo, na interpretação correta da expressão algébrica da definição formal de continuidade, a qual abrange explicação das simbologias $|x - x_0| < \delta$ e

$|f(x) - L| < \varepsilon$ em termos das vizinhanças $V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$, reconhecendo que $L = f(x_0)$ é condição para garantir a continuidade da função (Domingos, 2003).

Portanto, a partir das questões levantadas nesta secção, verifica-se a importância de envolver ativamente os estudantes na construção de significados corretos dos conceitos de limite e continuidade, no decurso de sua aprendizagem. Ao incentivar essa prática, dar-se-á sentido mais completo às noções intuitivas, notações algébricas e formais desses conceitos, para além de desenvolverem uma compreensão adequada sobre esses conceitos matemáticos.

4.3. As representações na compreensão de limite e continuidade

A compreensão de um conceito matemático normalmente implica não apenas o conhecimento de seus diferentes significados, mas também o conhecimento das suas múltiplas representações (Tripathi, 2008). Uma vez que a comunicação em Matemática se estabelece com base em representações (Duval, 2006), estas são referidas como fundamentais na construção de conceitos matemáticos pelos estudantes, existindo uma relação entre a sua compreensão e as representações por eles usadas (Duval, 2006; Karatas et al., 2011).

Quando um estudante é desafiado a resolver um problema matemático, muitas vezes recorre a ilustrações e esquemas a fim de apoiar seu pensamento. Em outras circunstâncias, alguns recorrem a procedimentos ou técnicas formais adquiridas ao longo do seu percurso académico, ou, ainda, apropriam-se de processos menos formais para alcançar a solução do problema. O facto é que, em todos esses casos, as diversas representações são usadas como uma forma de comunicar, por meio de procedimentos ou esquemas, o raciocínio desenvolvido a fim de alcançar o resultado de um problema (Sierpinska, 1994; Webb, Boswinkel & Dekker, 2008).

As *representações* são frequentemente usadas em Matemática com o objetivo de descrever os processos e produtos que são observáveis externamente (símbolos, gráficos, entre outros). Da mesma forma são usadas para os processos que ocorrem internamente na mente dos estudantes, ao raciocinarem matematicamente, e atuam como recursos ou ferramentas essenciais para apoiar o ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos (Duval, 1999, 2006; Goldin, 2002, 2003; Henriques & Ponte, 2014). O seu uso é enfatizado em orientações curriculares (NCTM, 2000), que argumentam que as representações podem ajudar os estudantes “a organizar seus pensamentos e a tornar as noções matemáticas mais concretas e disponíveis para reflexão” (NCTM, 2000, p.68).

Alguns autores consideram as representações como internas ou externas ao indivíduo. As representações internas correspondem às configurações mentais e conceitualizações particulares ao indivíduo sobre um objeto, situação ou o que lhe é associado (Goldin, 2002). Tais fenómenos são construídos por eles a partir de suas experiências ou observação de comportamentos, sendo frequentemente também chamados de representações mentais (Sierpinska, 1994; Duval, 1999, 2006). Elas incluem as imagens visuais e a representação espacial, tátil e cinestésica dos indivíduos, contemplando suas heurísticas, estratégias de resolução de problemas e as conceções e equívocos em relação às notações e configurações matemáticas convencionais (Goldin, 2003).

As representações externas envolvem registos semióticos que têm como objetivo representar, por meio de palavras, símbolos ou esquemas, o raciocínio matemático desenvolvido na mente do indivíduo (Goldin, 2002; Hiebert & Carpenter, 1992). Elas são elementos que descrevem exteriormente as representações mentais (internas), isto é, tornam-nas visíveis ou acessíveis aos outros indivíduos (Duval, 1999). São exemplos de representações externas: as frases em linguagem natural (representação verbal), os gráficos de funções e figuras geométricas (representação geométrica), as expressões algébricas (representação algébrica), os diagramas ou desenhos (representação icónica) e as tabelas numéricas (representação tabular) (Duval, 2006; Goldin, 2002).

A existência de relação entre representações internas e externas é destacada na literatura (Duval, 1999; Hiebert & Carpenter, 1992). Esses autores indicam que o conhecimento é concebido cognitivamente por representações internas (imagens mentais, insight, etc.), e comunicado por meio de representações externas (ou semióticas) a partir da linguagem natural, de símbolos, desenhos ou de objetos físicos. Goldin (2002) enfatiza a importância de experiências didáticas, que estimulem o desenvolvimento de diferentes representações internas eficientes, correlacionando-as com representações externas para o desenvolvimento da compreensão dos estudantes sobre um conceito matemático.

Tendo em vista os objetivos neste estudo, o termo *representação* limitar-se-á à sua tipologia externa, e é interpretada como elementos que permitem aceder às conceções dos estudantes e ao seus conhecimentos das múltiplas conexões do conceito matemático com outras noções. Dessa maneira, constituindo-se num instrumento essencial para apoiar a compreensão dos alunos sobre conceitos matemáticos (NCTM, 2000; Tripathi, 2008). Assim, elas podem auxiliar os estudantes a organizarem os seus pensamentos e tornar as noções matemáticas mais concretas e disponíveis para reflexão, comunicar e argumentar matematicamente, além de realizar conexões entre diferentes conceitos matemáticos e resolver problemas reais modelados matematicamente (NCTM, 2000).

O uso de diferentes representações de um conceito matemático ajuda os estudantes a obterem uma ideia mais completa sobre ele, e configura-se em um recurso poderoso que pode auxiliá-los na resolução de problemas de matemática. Por isso, compreendê-lo requer uma abordagem que contemple essa diversidade (Duval, 2006; Tripathi, 2008). Para Duval (2006), os diferentes tipos de representações constituem elementos que permitem descrever os processos matemáticos, sendo classificados, relativamente à sua funcionalidade, em registos de representações monofuncionais ou multifuncionais, estando cada um destes registos associados à forma discursiva ou não discursiva de representações (figura 4.1).

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA Resultante de um de três tipos de operações discursivas: 1. Designação de objetos (nomes, marcas); 2. Comprovação de relações ou propriedades; 3. Inferência (dedução, cálculo …).	**REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA** Configurações de formas de Dimensão: 1D/2D, 2D/2D, 3D/2D.
REGISTOS MULTI-FUNCIONAIS Os processos não se podem converter em algoritmos	**Linguagem Natural** Duas modalidades não equivalentes de expressão: - Oral (explicações); - Escrita (visual): teoremas, provas ...	**Icónicas:** desenhos, esboços, padrões; **Não icónicas**: figuras geométricas que podem ser construídas com ferramentas.
REGISTOS MONO-FUNCIONAIS A maioria dos processos é Algoritmos.	**Sistema Simbólico** Somente escrito (impossível dizer oralmente, exceto em grafia): Cálculo (numérico ou algébrico), computação, provas (demonstrações, generalizações …)	**Gráficos** Combinações entre formas de dimensões D0, D1 e D2, orientas ou não, como diagramas, gráficos ...

Tabela 4.1 – Classificação dos diferentes registos de representações que podem ser mobilizados nos processos matemáticos. Adaptado de Duval (2006, p. 110)

Assim, para Duval (2006), enquanto num registo monofuncional a maioria dos processos toma a forma de algoritmos e tem como função cognitiva o processamento matemático, nos registos de representação multifuncional os processos nunca podem ser convertidos em algoritmos, assumindo diferentes funções cognitivas, como a comunicação, processamento de informação, consciência, imaginação, entre outros.

A teoria de registos das representações em Matemática de Duval (1999, 2006) deixa claro que a capacidade de construir diferentes representações identificáveis dos conceitos matemáticos e de as transformar em outras representações, é essencial para sua compreensão. Duval (1999) destaca a importância de os estudantes serem capazes de construir representações identificáveis dos conceitos matemáticos, que consiste no registo representativo correto e adequado de um conceito matemático.

À luz disso, tem-se por exemplo, a representação verbal de um conceito (compreensível em língua natural corrente), uma figura geométrica, a expressão algébrica de equação, e outros registos, devendo a construção destes, respeitar regras convencionalmente estabelecidas, nomeadamente, regras gramaticais para as línguas naturais, entraves de construção das figuras, regras de formação no sistema algébrico, entre outras. Essas regras convencionais visam assegurar as condições de identificação e reconhecimento da representação e a possibilidade de sua transformação em outros registos (Duval, 1999). De maneira similar, Goldin (2002) salienta que o uso correto das definições e propriedades da adição e multiplicação dos números naturais, o sistema de numeração na base 10 e a definição de número primo, convencionalmente aceites em Matemática, possibilitam concluir que $3 + 4 \times 5 = 23$ corresponde à representação numérica do conceito de número primo enquanto que $3 + 4 \times 5 = 35$ (considerando primeiro a adição) não seria (Goldin, 2002).

No que tange às transformações de diferentes representações de um mesmo objeto matemático, Duval (1999, 2006) considera que podem ocorrer de duas formas distintas, isto é, por meio de *tratamento* e *conversão*. Os *tratamentos* são transformações realizadas dentro do mesmo registo de representação, tal como o cálculo algébrico, que constitui uma forma de tratamento próprio das expressões numéricas/algébricas (cálculo numérico ou cálculo algébrico), para além da reconfiguração geométrica que é um tipo de *tratamento* particular para as figuras geométricas. Nesse ponto, a partir de numerosas operações (translação, rotação, entre outras), as figuras geométricas são modificadas gerando novos registos geométricos (Duval, 1999).

Assim, o cálculo de limite de uma função por meio de operações algébricas, $\left(\text{ex. } \lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} 5x-3 = \lim_{x\to1} 5\cdot1-3 = 2\right)$ constitui um *tratamento* da representação algébrica do limite, uma vez que os diferentes registos $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} 5x-3$, $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} 5\cdot1-3$ e $\lim_{x\to1} f(x) = 2$ são resultados de operações algébricas realizadas dentro do registo original da representação algébrica do limite $\left(\lim_{x\to1} f(x)\right)$, constituindo assim um *upgrade* dessa representação.

As *conversões* são transformações realizadas entre diferentes registos de representações, conservando o mesmo objeto, como por exemplo, a transformação de uma expressão algébrica em sua representação gráfica (Duval, 2006). O autor destaca que a *conversão* de representações é uma atividade cognitiva mais complexa que o *tratamento*, pois exige um conhecimento do objeto a ser representado nos diferentes sistemas de representações, bem como as regras convencionais a eles associadas. Dessa forma, segundo a teoria de Duval (1999, 2006), passar da representação algébrica do limite no ponto para a representação geométrica no plano cartesiano é um caso de *conversão* (figura 4.4). O autor realça ainda a importância de os estudantes serem capazes de trabalhar dentro e entre os diferentes registos de representações com fluência, a fim de alcançarem compreensão na aprendizagem dos conceitos matemáticos.

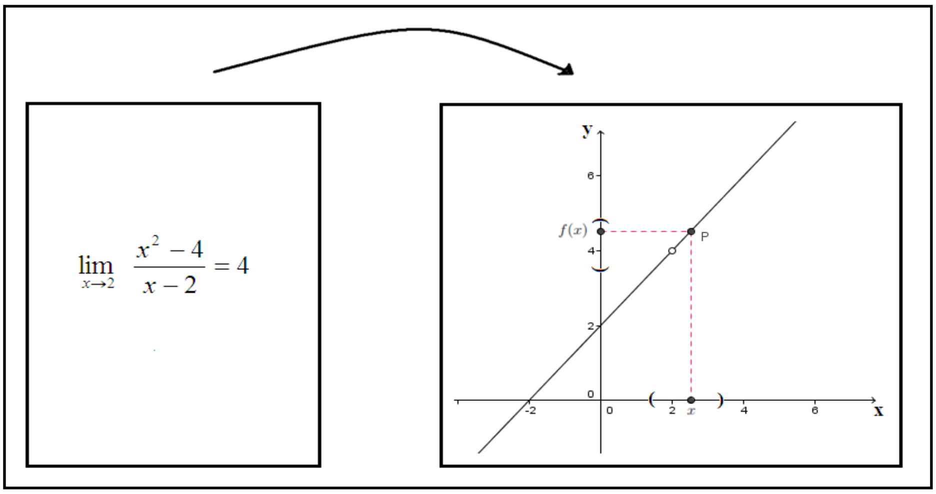


Figura 4.4 – Exemplo de *conversão* (Duval, 2006) associada ao conceito de limite de funções

Em geral, os estudantes apresentam muitas dificuldades com os dois tipos de operações cognitivas, as quais são a base dos processos de representação em Matemática (Duval, 2006; Goldin, 2002). Duval (2006) afirma que, embora a maioria dos estudantes seja capaz de aprender algum *tratamento* elementar, poucos conseguem realmente *converter* representações. Esse tipo de dificuldade é observado, com frequência, no ambiente escolar de sala de aula e, por isso, é fundamental que o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos seja conduzido por ações didáticas que estimule o uso de conexões entre as diferentes representações pelos estudantes. Além disso, é fundamental que os possibilite envolverem-se em diferentes sistemas de representação, pois estas são condições necessárias para a distinção entre o objeto matemático e suas representações, bem como para reconhecer o objeto matemático em cada uma de suas diferentes representações (Duval, 2006; Goldin, 2002).

As múltiplas representações do limite e continuidade são referidas como fundamentais à construção e comunicação destes conceitos porque se configuram em ferramentas que suportam o raciocínio nos processos de interpretação e discriminação dos diferentes aspetos a eles associados (Karatas et al., 2011; Pons et al., 2011). A capacidade de reconhecer, representar e traduzir esses conceitos nas suas diferentes representações, é considerada um requisito para a sua compreensão, sendo as representações verbais, numéricas, algébricas e geométricas as mais consideradas no seu ensino (Domingos, 2003; Karatas et al., 2011; Sealey et al., 2014; Tall, 1993).

A representação verbal consiste na descrição de aspetos sobre esses conceitos matemáticos recorrendo à linguagem coloquial ou natural (Fernández-Plaza et al., 2013), sendo muito comum o uso de noções intuitivas como, 'se aproxima', 'tende' e 'tão pequeno quanto se queira' para expressar ideias sobre o limite e "*não tem buracos*", '*não há interrupção*' e '*comportamento uniforme*' para comunicar sobre a continuidade de uma função (Fernández-Plaza et al., 2013; Karatas et al., 2011). As representações verbais são importantes para explicação das simbologias que traduzem esses conceitos e frequentemente utilizadas nas justificações escritas da resolução de tarefas, pelos estudantes (Karatas et al., 2011; Sealey et al., 2014).

A representação numérica está presente quando se usam sequências de números para descrever as aproximações simultâneas associadas ao conceito de limite, como por exemplo, as sequências $x = 1{,}9,\ 1{,}99,\ 1{,}999, \dots$ e $x = 2{,}1,\ 2{,}01,\ 2{,}001, \dots$, para indicar que $x \to 2^+$e $x \to 2^-$ (Pons et al., 2011). Neste tipo de representação, os números funcionam como símbolos que visam descrever o comportamento dos pontos x no domínio da função e/ou das imagens $f(x)$ da função, a partir da noção de aproximação simultânea. Dessa forma, assume um papel fundamental na construção das noções intuitivas do limite e continuidade pelos estudantes, constituindo-se num registo indispensável à apreensão da representação algébrica desses conceitos (Juter, 2006; Pons et al., 2011).

As representações algébricas contemplam as expressões matemáticas que recorrem às simbologias da Álgebra. Associadas ao limite e continuidade de funções, incluem, por exemplo, a expressão algébrica da *definição formal* de limite no ponto assente na noção de vizinhança, a taxa instantânea de variação de função $\left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$ ou ainda a definição informal de continuidade expressa por $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Estas representações são essenciais à resolução de tarefas, nas quais é requerido o cálculo algébrico do limite ou mesmo o uso de sua definição formal (Domingos, 2003; Karatas et al., 2011; Maurice, 2000).

As representações geométricas do limite e continuidade são comumente descritas por registos geométricos de gráfico de funções, apoiadas num sistema de coordenadas cartesianas, contendo registos indicativos: (i) das variáveis do limite ($x \to x_0 / f(x) \to L$) por meio de setas ou intervalos abertos para representar o limite no ponto ou a (des)continuidade de funções; (ii) da reta vertical ou horizontal 'imaginária' cujo gráfico da função f dela se aproxima e toma a direção para representar os limites *infinito* ou *no infinito* (Biza et al., 2007; Karatas et al., 2011; Nair, 2010).

Alguns autores mencionam também o uso de representação *tabular* para representar o limite e continuidade de funções, caracterizada por sequências numéricas apoiadas em tabelas para descrever as aproximações simultâneas ($x \to x_0$ / $f(x) \to L$), ($x \to x_0$ / $f(x) \to \pm\infty$) ou ($x \to \pm\infty$ / $f(x) \to L$), como forma de representar as noções de limites ou mesmo registos numéricos em tabelas de pares ordenados $(x, f(x))$ do plano cartesiano, como forma de representar os pontos de uma função f (Domingos, 2003; Mira-López, 2016).

O potencial dessas diferentes representações para a compreensão desses conceitos matemáticos tem destaque, por exemplo, nos trabalhos de Tall (1993), Domingos (2003), Juter (2006) e Swinyard e Larsen, (2012) e Sealey et al. (2014). Após analisar os resultados de diversas pesquisas internacionais, sobre o ensino e aprendizagem dos conceitos de Cálculo, incluindo o limite e continuidade de funções, Tall (1993) concluiu que os estudantes que alcançaram maior sucesso na aprendizagem e compreensão desses conceitos foram capazes de reconhecer e transformar os diferentes registos de suas representações (algébricas, numéricas e geométricas), sabendo operar com eles. Juter (2006), por sua vez, infere do seu estudo que os estudantes que apresentaram maior compreensão do limite, foram capazes de manipular as suas diferentes representações e identificar as conexões entre elas.

Os estudos de Domingos (2003) e Swinyard e Larsen (2012) mostram que um estudante que é capaz de operar e estabelecer conexões entre diferentes representações do limite no ponto, com registos assentes na sua definição formal, explicando o significado das simbologias $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ em termos das vizinhanças $V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$, reconhecendo o papel dos quantificadores nesses registos e concebendo o limite como resultado da implicação $(x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L))$, o que evidencia ter uma conceção adequada da definição formal, necessária à compreensão de limite e da definição formal da continuidade de funções.

Já Sealey et al. (2014) verificaram que a verbalização, escrita e registo geométrico do TVI, revelou-se fundamental à compreensão adequada desse teorema pelos estudantes. Dessa maneira, a conexão desses registos possibilitou-lhes múltiplos contextos nos quais puderam construir intuições adequadas deste teorema, que favoreceram a significação da notação algébrica e o seu papel na proposição matemática que o define.

Todos estes autores salientam que a compreensão do limite e continuidade é potencializada pelo uso integrado de suas diferentes representações e apontam para que o ensino e aprendizagem desses conceitos matemáticos sejam enriquecidos com o uso de suas diferentes representações ao projetar atividades instrucionais, possibilitando aos estudantes alcançarem uma compreensão adequada destes conceitos.

4.4. O limite e continuidade na resolução de problemas que os envolvem

A resolução de problemas matemáticos envolve atividade criativa de experimentação, formulação de conjeturas, teste e validação das mesmas, argumentação, prova e refutação. À vista disso, constitui-se como um aspeto fundamental da atividade matemática (Pólya, 1945; Tall, 1991), e um traço fundamental das orientações curriculares de todos os níveis de ensino, do 1º ciclo do ensino básico ao ensino superior (Albuquerque et al., 2006; CBMS, 2012; NCTM; 2000).

Sob essa perspetiva, vários autores em Educação Matemática e documentos orientadores da formação inicial de professores de Matemática defendem que a compreensão do conceito matemático está ligada com a capacidade que o estudante tem de mobilizar os conhecimentos adquiridos para resolver problemas (Albuquerque et al., 2006; Domingos, 2003; Mira-López, 2016; Skemp, 1976).

Os problemas são frequentemente concebidos como 'recursos' de ensino-aprendizagem no qual um indivíduo não dispõe de um método conhecido de resolução e que requerem um esforço especial de interpretação e simulação de diferentes possibilidades de resolução (Pólya, 2003; Ponte, 2005; 2014). Por conseguinte, diferem dos exercícios, que são questões de "dificuldade reduzida, em que os alunos são chamados a aplicar um método de resolução já aprendido, e que se resolve habitualmente em poucos minutos" (Ponte, 2014, p. 264).

Os problemas devem sempre possuir um grau de dificuldade apreciável, de forma que seja possível sua resolução pelos estudantes. Caso seja demasiado difícil, poderá inviabilizar sua resolução pelos estudantes, ao passo que, se for demasiado fácil, constituir-se-á em um exercício (Ponte, 2005). Este autor indica que um bom problema possui, geralmente, três características: (i) ser desafiante e interessante, numa perspetiva matemática, permitindo ao estudante não só desenvolver a sua curiosidade – a busca pela solução do problema – mas também a criatividade, alimentando o objetivo de encontrar a melhor estratégia para sua resolução; (ii) ser adequado, ou seja, condizente à faixa etária e nível de ensino dos estudantes, permitindo-lhes a conexão de seus conhecimentos prévios com os novos no processo de resolução; (iii) ser problemático, a partir de algo que faz sentido matematicamente, em que o processo de resolução não esteja completamente explícito. O autor salienta que os bons problemas constituem uma boa oportunidade para que os estudantes possam sentir-se desafiados nas suas capacidades matemáticas e assim experimentar o gosto pela descoberta.

Schoenfeld (1996), por sua vez, aponta quatro caraterísticas que considera importantes num problema a fim de que este seja útil no ensino da Matemática. Para este autor, um bom problema deve ser acessível, ou seja, deve apresentar enunciado que seja facilmente compreendido e que não requeira uma quantidade de vocábulos que dificulte a sua interpretação. Ademais, deve permitir múltiplas maneiras de resolução, ou pelo menos, de abordagem. Schoenfeld (1996) parte do princípio de que o foco principal na resolução de um problema não deve ser simplesmente encontrar a sua resposta, mas sim conseguir realizar ligações e conexões entre os diferentes conceitos associados à sua resolução, a fim de encontrar a solução procurada. Além disso, também indica que um problema deve servir de introdução a ideias matemáticas importantes, tais como, os problemas cujos procedimentos de resolução apelam para importantes estratégias heurística, servindo de “terreno de treino” para o desenvolvimento de novas descobertas.

Por fim, Schoenfeld (1996) destaca que um bom problema deve constituir o gérmen para "honestas e boas" explorações matemáticas. De maneira análoga, os problemas abertos que apelam a generalização matemática podem conduzir os alunos à criação e resolução de novos problemas possibilitando-os fazerem Matemática. O autor considera que a combinação destas características constitui um território em que os alunos podem envolver-se no desafio intelectual, além de desenvolver a sua compreensão matemática. Schoenfeld (1996, p. 72) indica, ainda, que “modelar e simbolizar, comunicar, analisar, explorar, conjeturar e provar” são atividades com sentido matemático, constituindo aquilo que a Matemática realmente é.

Abrantes (1989), ao refletir sobre o que se entende (ou não) por um (bom) problema, com base em critérios estabelecidos na literatura, distingue-os em sete tipos: *exercícios, problemas de palavras, para equacionar, para demonstrar, para descobrir, da vida real e situação problemática*. Para o autor, os *exercícios* resumem-se à aplicação de algoritmos ou procedimentos conhecidos para alcançar a solução, tal como calcular o valor numérico de $x^2 - 3x$ para $x = 2$. Os *problemas de palavras*, representam situações matemáticas formuladas de modo claro e explícito, apresentando enunciados descritos em linguagem verbal, cujos contextos são irrelevantes. Dessa forma, são resolvidos por processos que resultam em combinações de algoritmos conhecidos, exemplificado por: “Um cliente comprou em um dia 2,3 metros de fazenda. No dia seguinte, comprou mais 1,5 metros da mesma fazenda. Quantos metros de fazenda comprou no total?” (Abrantes, 1989, p. 8).

Os *problemas para equacionar* envolvem situações que traduzem expressões e/ou equações algébricas, em que as estratégias de resolução estão explicitas no enunciado.

Tal contexto acaba por não desempenhar qualquer papel relevante, bem como verifica-se em: “O João tem metade da idade do pai. Sabendo-se que a soma das duas idades é 72, quantos anos tem o João?” (Abrantes, 1989, p. 8). No que se refere aos *problemas para demonstrar*, envolvem-se provas e validações de uma conjetura, na qual as estratégias de resolução não são explícitos e precisam ser descobertos, a partir de reformulação e elaboração de novos algoritmos, como por exemplo: “Usando os casos de semelhança, mostre que a altura relativa a hipotenusa divide um triângulo retângulo em dois triângulos semelhantes.”

Por sua vez, os enigmas, *problemas para descobrir*, correspondem às situações matemáticas que geralmente possuem em seu enunciado toda a informação relevante. Em virtude disso, eles requerem frequentemente atos de *insight* à sua resolução, cuja solução quase sempre é única e bem determinada, tal como se verifica em: “Usando apenas 6 fósforos, forme quatro triângulos equiláteros geometricamente iguais” (Abrantes, 1989, p. 8). Os *problemas da vida real*, por seu turno, envolvem a criação de um modelo matemático que traduz a situação apresentada, que requerem um esforço especial de interpretação e simulação de diferentes possibilidades de resolução. Desse modo, a sua solução pode não ser única e as diversas soluções aceitáveis nem sempre serão ‘rigorosas’, mas sim aproximadas, tal como exemplificado por: “Construir uma planta de um estádio - um campo de futebol e uma pista de atletismo” (Abrantes, 1989, p. 8).

Por último, as *situações problemáticas* envolvem situações em que o contexto é a própria Matemática sem que haja formulação explícita do problema, apelando-se unicamente à exploração do contexto. A solução de uma situação problemática passa pela formulação e exploração de um ou vários problemas novos, tal como se verifica em “o produto de três números inteiros consecutivos é sempre um número par múltiplo de 3. Comentar a situação se substituirmos o produto por soma” (Abrantes, 1989, p. 8).

Abrantes (1989) valoriza sobretudo as três últimas categorias que se destacam pela sua relação próxima com a realidade e, em especial, pela sua natureza aberta. Nesse sentido, o autor argumenta que *problemas de palavras*, *problemas para equacionar*, *para demonstrar* e *para descobrir* acabam por se tornar repetitivos, coincidindo por vezes com os exercícios quanto à formulação e método de resolução.

Skovsmose (2000), por sua vez, salienta a importância do contexto dos problemas que poderá remeter para três categorias: *à Matemática pura*, que se refere a problemas formulados em termos puramente matemáticos, ao que designa de '*semi-realidade*' que, por outras palavras, são situações com aparência de reais mas que na verdade são artificiais e concebidas exclusivamente para a aprendizagem, e à *realidade*, como por exemplo, os problemas de modelação. O autor destaca, ainda, que o ensino dos conceitos matemáticos não deve considerar problemas que se situem exclusivamente num ambiente, mas sim mover-se entre eles.

Assim, ao mesmo tempo que trazem situações reais para a sala de aula e propiciam a integração entre os conhecimentos adquiridos correlacionando-os num mesmo contexto, os problemas matemáticos podem favorecer o desenvolvimento da capacidade 'de aprender a aprender' dos estudantes e a abertura de caminhos para novas aprendizagens. Desse modo, esse procedimento possibilita uma melhor compreensão matemática dos conceitos envolvidos (Pólya, 1945; Ponte, 2005).

Em relação aos conceitos de limite e continuidade, a literatura tem revelado que a compreensão desses conceitos matemáticos está ligada à capacidade de mobilizar conhecimentos para resolver problemas que os envolvam. Nesse sentido, são práticas comuns o uso de problemas que remetem à *análise de erros e provas matemáticas,* bem como os que apelam à *modelação matemática*, tanto para a promoção quanto para a consolidação das aprendizagens sobre esses conceitos matemáticos (Alibert & Thomas, 1991; Domingos, 2003; Karatas et., 2011; Ko & Knuth, 2009; Tall, 1991).

Os problemas de *análise de erros* requerem a identificação do erro em expressões ou resoluções matemáticas e a sua correção justificada. Nalgumas vezes, recorrem a um contraexemplo para refutá-las, sendo importantes para reforçar os significados e fundamentos dos conteúdos que estão sendo utilizados na análise (Juter, 2000; Ko & Knuth, 2009). Os problemas de *prova matemática* remetem à demonstração de conjeturas matemáticas, por meio de um conjunto de argumentos lógicos e formais, com base em axiomas, definições ou proposições, que é desenvolvido partindo de etapas lógicas para deduzir a verdade da conjetura (Alibert, & Thomas, 1991; Ko & Knuth, 2009). Juntos, esses dois tipos de problemas têm importantes funções didáticas, nomeadamente, podem fornecer aos estudantes *insights* sobre os significados por trás das afirmações. Além disso, ajudam-nos a compreender o porquê de as afirmações serem verdadeiras ou falsas, sendo frequentemente usados para conduzir os estudantes à formalização do limite e continuidade (Ko & Knuth, 2009; Swinyard & Larsen, 2012).

Entre as vantagens dos problemas *análise de erros* e *provas matemáticas* para a compreensão do limite e continuidade, destacam-se a promoção de uma profunda compreensão conceitual e do papel das definições e teoremas matemáticos, além de constituírem uma oportunidade para os estudantes desenvolverem a capacidade de pensar abstratamente sobre esses conceitos matemáticos (Edwards & Ward, 2008; Ko & Knuth, 2009). Tem-se, como exemplo, refutação de erros em proposições ou resoluções matemáticas sobre funções contínuas ou que se propõem definir formalmente o limite. Ademais, realço também a demonstração de propriedades associadas ao limite ou da continuidade de uma função recorrendo a aplicação da definição formal de limite, ou mesmo, a validação ou refutação de proposições matemáticas que envolvam o Teorema do Valor Intermédio (Alibert, & Thomas, 1991; Juter, 2006; Ko & Knuth, 2009; Swinyard & Larsen, 2012;).

Os problemas que apelam à *modelação matemática* envolvem situações de contextos semi-reais ou reais (Skovsmose, 2000), que requerem a criação de um modelo matemático para traduzir a situação apresentada. Tal situação ocorre com os problemas de otimização associado ao Cálculo, cujo objetivo remete-se a encontrar solução ótima para certa quantidade. Enquadram-se nesta classificação, igualmente, os problemas de máximo e mínimo de funções reais que visam encontrar o valor de uma determinada variável, tendo em conta algumas hipóteses e restrições (Malaspina & Font, 2010) e o problema de garantir a existência de raiz de uma equação. Destaco ser esta a base de muitos problemas físicos e químicos e, por consequência, constitui algumas das aplicações do TVI associado às funções contínuas (Strand, 2016).

Relativamente aos problemas de otimização, apesar de frequentemente serem usados como aplicação direta do conceito de derivada de uma função (Artigue, 1991), algumas orientações metodológicas para o ensino de limite dão grande importância ao seu uso como forma de consolidação da aprendizagem do limite. É o que recomenda o NCTM (1998): "As funções, os gráficos e a noção de limites devem ser exploradas, a partir de exemplos concretos tais como os de maximizar o volume de uma caixa obtida por dobragem de uma folha de papel reticulado" (1998, p. 142).

Os problemas associados à *modelação matemática* são de grande interesse para a educação matemática, principalmente por resultarem, em muitos casos, de situações práticas do dia a dia, além de constituir uma oportunidade para os estudantes desenvolverem habilidades algébricas do cálculo de limite e continuidade de funções. Trata-se, justamente, do que atesta Albuquerque et al. (2006, p. 23): “A resolução de problemas da vida real através da sua formalização algébrica (isto é, mediante a associação de variáveis às quantidades e o estabelecimento das equações que representam as relações entre elas) contribui para consciencializar os futuros professores do papel fundamental da álgebra”.

Dessa forma, os problemas que remetem para a *análise de erros e provas* matemáticas e para a *modelação matemática*, associados aos conceitos de limite e continuidade, constituem elementos que possibilitam aos estudantes mobilizarem seus conhecimentos informais e formais sobre esses conceitos matemáticos, e revelar a sua compreensão matemática sobre esses conceitos (Goldin, 2002; Tall, 1991).

Em síntese, neste estudo considero que a compreensão matemática pode ser *instrumental* ou *relacional* (Skemp, 1978), e que esses dois tipos de compreensões são úteis para classificar a compreensão evidenciada pelos estudantes quando aprendem matemática, mas não revelam quais os componentes que nos podem dar alguma informação sobre essa compreensão. Sendo assim, assumo que os significados atribuídos ao conceito matemático, o uso de suas diferentes representações e a sua aplicação na resolução de problemas que o envolve, constituem elementos que permitem descrever o modo como essa compreensão emerge e se desenvolve, sendo considerados como componentes dessa compreensão.

Capítulo 5

Metodologia de investigação

Neste capítulo apresento as opções metodológicas que orientam este estudo, o papel desempenhado pelo pesquisador, os métodos e processos de recolha e análise dos dados e as questões éticas consideradas no estudo. Estes aspetos são justificados e fundamentados em referenciais teóricos consideradas pertinentes ao propósito do estudo.

5.1. Opções metodológicas

O trabalho de pesquisa aqui proposto foca-se na análise da compreensão dos estudantes sobre o conceito de limite e continuidade de funções reais, que decorreu de uma experiência de ensino de cunho exploratório marcada pela integração do *software* GeoGebra. Tendo em conta este objetivo, justifica-se a opção pela metodologia de investigação qualitativa e interpretativa, tendo como base a realização de uma experiência de ensino construtivista (Cobb & Steffe, 1983) que visava promover a aprendizagem desses conceitos matemáticos, de modo a contemplar tanto a dimensão teórica, como experimental da pesquisa, obtendo-se como principal vantagem uma ligação do plano teórico da racionalidade ao território experimental da prática educativa (Czarnocha & Prabhu, 2006; Steffe & Thompson, 2000).

5.1.1. Abordagem qualitativa e interpretativa

A abordagem qualitativa e interpretativa de pesquisa consiste numa forma de pesquisa centrada na interpretação da realidade e experiências sociais dos investigados, buscando descobrir e compreender múltiplos significados das ações individuais e/ou interações sociais a partir dos intervenientes, no processo investigativo e, em alguns casos, desenvolver modelos teóricos que permitam explicar o fenómeno investigado (Coutinho, 2011; Creswell, 2007). O pesquisador qualitativo procura obter descrições e interpretações situacionais de fenómenos, tornando-as disponíveis aos seus colegas (outros pesquisadores), estudantes e outras pessoas, a fim de compreender os fenómenos investigados (Stake, 2011). As principais características da pesquisa qualitativa que enquadram esta pesquisa, conforme indicam Bogdan e Biklen (1994), Creswell (2007) e Stake (2010), são:

(1) *A pesquisa qualitativa ocorre em um cenário real*, caracterizado por um ambiente que faz parte da rotina habitual dos investigados, nomeadamente, ambientes de ensino e aprendizagem em sala de aula, entre outros. Bogdan e Biklen (1994) salientam que o investigador qualitativo deve conduzir a sua pesquisa no local onde está o participante, dispendendo nele grande quantidade de tempo, a fim de elucidar questões de investigação, o que permite "ao pesquisador desenvolver um nível de detalhe sobre a pessoa ou sobre o local e estar altamente envolvido nas experiências reais dos participantes" (Creswell, 2007, p. 186).

(2) *A pesquisa qualitativa usa métodos múltiplos interativos e humanísticos de recolha de dados*, nomeadamente, observações, entrevistas, gravações em áudio e/ou vídeo, produções em textos ou imagens, entre outros, os quais são usados a partir do envolvimento dos participantes do estudo, sendo ricos em descrições de pessoas, situações e acontecimentos. Lüdke e André (1986) salientam que o pesquisador qualitativo deve procurar usar o maior número possível de métodos de recolha de dados, pois a perda de um aspeto considerado trivial (registado por algum método) pode ser fundamental à compreensão do problema que está sendo estudado.

(3) *A pesquisa qualitativa é emergente em vez de estritamente pré-configurada*, ou seja, constitui-se em uma pesquisa flexível que permite alterações ao longo do processo de investigação. Segundo Creswell (2007), alguns aspetos do estudo qualitativo que são conjecturados e desenvolvidos na fase preliminar, como por exemplo, questões de estudo, o processo de recolha de dados e o modelo teórico ou padrão geral de compreensão do fenômeno investigado, podem ser alterados e/ou reconfigurados, sendo ajustados no decurso da investigação.

(4) *A pesquisa qualitativa é fundamentalmente interpretativa*, pois fixa-se nos significados das relações humanas a partir de diferentes pontos de vista (Stake, 2011). Neste tipo de pesquisa, o pesquisador se interessa por compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências (Bogdan & Biklen, 1994) e, por isso, analisa os dados recolhidos com base na identificação e descrição de temas ou categorias que

visam tirar conclusões sobre significados dos fenómenos investigados (Creswell, 2007). Tem como base o método indutivo, uma vez que o pesquisador busca desvendar a intenção, o propósito da ação, e compreender a situação sem impor expectativas prévias ao fenómeno estudado (Coutinho, 2011).

(5) *Na pesquisa qualitativa os fenómenos investigados são vistos holisticamente pelo pesquisador*, ou seja, o pesquisador concebe a realidade do estudo por inteiro e não parcialmente, sendo muito comum visões amplas sobre o fenómeno investigado, (macroanálise) ao invés de microanálise, caracterizada pela análise (profunda ou não) da experiência de único indivíduo ou interação única entre indivíduos, como por exemplo, a análise do diálogo entre dois estudantes na resolução de uma tarefa (Stake, 2011). Para Creswell (2007), quanto mais completo, interativo e abrangente for a narrativa do estudo qualitativo, melhor ele será.

(6) *Na pesquisa qualitativa o pesquisador reflete sobre o seu papel na investigação*, ou seja, o pesquisador reflete sobre quem ele é na investigação, sendo sensível à sua biografia pessoal e forma como ela interfere no estudo (Creswell, 2007). Essa introspecção revela que o 'eu' pessoal torna-se inseparável do 'eu' pesquisador (Creswell, 2007).

(7) *Na pesquisa qualitativa o pesquisador usa um raciocínio multifacetado, interativo e simultâneo*, caracterizado por um processo de pensamento permeado por raciocínios indutivos e dedutivos que funcionam de forma integrada e interagem de forma cíclica e sistemática. Neste sentido, os pensamentos do pesquisador vão desde a recolha e análise de dados até a reformulação do problema e volta num processo cíclico, o que o permite analisar e refletir sobre as atividades desenvolvidas pelos participantes, buscando o refinamento dos resultados obtidos (Creswel, 2007). De acordo com Coutinho (2011), esse processo permite que possíveis teorias surjam à medida que os dados empíricos emergem e são interpretados pelo pesquisador de forma indutiva e sistemática, com base nos pressupostos teóricos ou nos dados.

No presente estudo, as características (1), (2) e (6) estão presentes uma vez que a investigação acontece num ambiente real de sala de aula, onde eu, enquanto pesquisador e professor da turma investigada, recolho os dados através de diversos métodos qualitativos, procurando estabelecer harmonia e credibilidade com os participantes do estudo. O duplo papel (professor e investigador), desempenhado por mim na investigação, é motivo de reflexão pessoal com vista ao meu desenvolvimento profissional, enquanto professor de matemática no nível superior.

A presença das características (3), (4), (5) e (7) decorre da interpretação que faço (macroanálise) da compreensão evidenciada pelos estudantes de uma turma de Pré-Cálculo sobre os conceitos de limite e continuidade de funções, com base no quadro de análise, construído e refinado a partir dos referenciais teóricos. Essa análise interpretativa começou com a realização de um estudo exploratório[12], que foi desenhado no intuito de servir de ligação entre o referencial teórico da investigação e a realização do estudo principal (experiência de ensino), contribuindo para a formação das suas principais características, e se tornou mais sistemática e formal mediante o confronto simultâneo dos dados coletados durante o estudo principal e as questões da pesquisa, tendo como suporte os referenciais teóricos.

5.1.2. Experiência de ensino

A metodologia de pesquisa adotada neste estudo enquadra-se no que Cobb e Steffe (1983) denominam como "experiência de ensino construtivista", que consiste numa sequência de episódios integrados de ensino no contexto de sala de aula, na qual o professor-investigador interage com os estudantes investigados, buscando compreender seus progressos durante um determinado período de tempo que se propõe, e possibilita a construção de modelos teóricos que permitem explicar a realidade dos estudante (Cobb & Steffe, 1983; Steffe & Thompson, 2000).

A realização de experiência de ensino favorece a interpretação e compreensão do pesquisador sobre o raciocínio dos estudantes, que evidenciam aprendizagens e/ou dificuldades (Steffe & Thompson, 2000). O uso de experiências de ensino como modalidade de pesquisa na Educação Matemática tem sido crescente, e motivado pelo aumento da consciência dos professores e pesquisadores sobre a sala de aula constituir um laboratório científico, focado na melhoria do processo de ensino e aprendizagem dos estudantes (Czarnocha & Prabhu, 2006).

Na experiência de ensino, é fundamental que um dos pesquisadores (ou o único) assuma o papel de professor da turma, concentrando em si um duplo papel, o de *professor-*

---

[12] Estudo exploratório consiste numa investigação mais curta, com vista a obter um primeiro conhecimento da situação que se quer estudar (Coutinho, 2011).

investigador durante o processo de investigação. Desta forma, ele interage com os investigados de forma contínua na investigação, o que lhe permite um controle maior sobre o processo de aprendizagem e a oportunidade de os compreender (Czarnocha & Prabhu, 2006; Steffe & Thompson, 2000).

A realização de uma experiência de ensino compreende três fases principais: (i) preparação e *design*; (ii) experimentação; e (iii) análise retrospetiva dos dados (Cobb & Steffe, 1983; Steffe & Thompson, 2000). A primeira fase consiste em preparar e desenhar todo o desenvolvimento da experiência. É caracterizada pela tomada de decisão inicial, devidamente justificada, sobre o(s) método(s) de ensino e os recursos que serão utilizados, tais como, as tarefas que serão elaboradas tendo em conta os objetivos de aprendizagem e o foco do estudo, a tecnologia, entre outros, e os métodos de recolha de dados a serem adotados (Cobb & Steffe, 1983; Steffe & Thompson, 2000). É nesta etapa que se decide, por exemplo, a natureza das tarefas que serão realizadas ao longo da experiência e a sua sequência, a gestão dos momentos de aula para a aplicação de cada tarefa, se serão realizadas individualmente ou em grupo, entre outros aspetos. Em suma, é planear o que será realizado na fase de experimentação em sala de aula tendo em mente os objetivos que se pretende atingir com a experiência.

A segunda fase, a experimentação, é quando ocorre a realização da experiência de ensino em sala de aula. Nela, o professor-pesquisador começa a ter contato com os estudantes investigados buscando compreender seus progressos na aprendizagem e possíveis dificuldades, a fim de tirar conclusões (Steffe & Thompson, 2000). Esta fase envolve, por exemplo: a explicitação dos objetivos e condições de realização do estudo aos estudantes; o estabelecimento da cultura da sala de aula que contempla a forma de ensino direto ou exploratório dos conteúdos (Ponte, 2005) e recursos a usar no ensino e aprendizagem, nomeadamente, as tecnologias e/ou outros; a recolha dos dados, como tarefas, testes, questionários, entrevistas; o trabalho dos alunos na realização das tarefas propostas; e o registo realizados durante a investigação, como notas de campo das observações, gravações em áudio e/ou vídeo das aulas, entre outros.

A terceira etapa é a análise retrospetiva dos dados. É nesta etapa que se realiza a análise dos dados recolhidos ao longo da fase de experimentação, com vista a compreender o fenómeno investigado. É um processo que envolve uma reflexão simultânea dos dados, construção de perguntas analíticas e a escrita de memorandos durante o estudo (Cobb & Steffe, 1983; Steffe & Thompson, 2000). Nesta fase é verificado, por exemplo, se os objetivos de aprendizagem foram alcançados e se houve dificuldades, tentando identificar quais as causas, a fim de, por um lado, ir ajustando a experiência no seu decurso e por outro, permitir o desenvolvimento de uma análise mais sistemática dos dados (Steffe & Thompson, 2000).

No capítulo 6 apresento uma descrição da preparação e design e experimentação da experiência de ensino que suporta este estudo, enquanto que nos capítulos 7, 8 e 9 a análise retrospetiva dos dados é apresentada. Ressalto ainda, que a análise retrospetiva é feita com base nos trabalhos dos estudantes que permitiu responder as questões de estudo e nas suas opiniões (questionário final e entrevista final) que favoreceu uma reflexão fundamentada sobre a experiência de ensino. A descrição do processo de análise da experiência de ensino é apresentada na secção 5.4 deste capítulo.

5.1.3. O papel do investigador

Numa visão convencional de investigação em sala de aula, pesquisador e professor desempenham diferentes papéis face ao interesse particular de cada um, a saber: enquanto o principal interesse dos pesquisadores envolvidos numa experiência de ensino consiste na investigação dos processos de ensino e aprendizagem em sua generalidade, buscando evidências empíricas de como um indivíduo aprende (Cobb & Steffe, 1983), o interesse dos professores encontra-se comprometido em apoiar e conduzir os estudantes a alcançarem a aprendizagem (Czarnocha & Prabhu, 2006; Ponte, Brocado & Oliveira, 2013).

A variedade de percursos de aprendizagem seguidos pelos estudantes, as divergências que surgem entre eles na realização das tarefas, o modo como a turma reage à presença do investigador, entre outros, são elementos imprevisíveis numa investigação em sala de aula e que a complexificam, exigindo do investigador um olhar mais apurado das questões que compõem esse ambiente (Czarnocha & Prabhu, 2006; Ponte, Brocado & Oliveira, 2013). Por isso, Steffe e Thompson (2000) sugerem que numa experiência de ensino o investigador assuma um duplo papel de *professor-investigador*. Isso significa concentrar em uma só pessoa tanto o papel de professor como de investigador, durante o processo de investigação. Na condição de pesquisador, ele procura, por exemplo, interpretar o raciocínio dos estudantes, as aprendizagens alcançadas, as dificuldades manifestas, reunindo informações que permitam compreender estes processos. Como professor, procura, a partir da interação com os estudantes, motivá-los na realização das atividades, verificar se conseguem alcançar as aprendizagens propostas, se manifestam algumas dificuldades, indicando caminhos para superá-las, e também se o trabalho de investigação proporcionou um envolvimento maior dos estudantes no conteúdo abordado em sala de aula (Creswell, 2007; Czarnocha & Prabhu, 2006; Steffe & Thompson, 2000). O duplo papel também permite investigar a própria prática profissional (Bogdan & Biklen, 1994).

Entretanto, administrar este duplo papel de professor e investigador não é uma tarefa fácil, atendendo à necessidade de participar no contexto do estudo e, simultaneamente, conseguir o afastamento suficiente para o observar e analisar. Por isso, tal como sugere Bogdan e Biklen (1994), busco o equilíbrio na combinação entre a minha participação (professor) e a observação (pesquisador) de forma que seja possível tornar-me de certa forma parte 'natural' do cenário de investigação e interpretar a situação investigada.

Considerando os objetivos deste estudo, enquanto pesquisador procuro observar e conduzir o processo de investigação de forma a recolher dados com precisão que permitam interpretar e compreender o raciocínio dos estudantes que evidenciam a sua compreensão sobre os conceitos de limite e continuidade de funções e quais os efeitos das interações com o GeoGebra para essa compreensão. Como professor, busco as melhores formas de conduzir os estudantes à aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade, tentando focar-me nas aulas, sem perder a perspetiva geral da turma e do comportamento de todos os alunos durante a resolução das tarefas propostas, desempenhando um papel de orientador das tarefas e questionando os alunos sobre as suas descobertas. Existindo uma relação estreita entre o investigador e o professor que orienta o trabalho dos estudantes, pode considerar-se que se trata, também, de um estudo sobre a minha prática profissional.

5.2. Os participantes do estudo

O presente estudo foi realizado no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Campus Nilópolis. Este instituto está localizado em Nilópolis, o menor município do estado do Rio de Janeiro - Brasil, que fica situado numa região conhecida pela sua alta densidade demográfica e pelos seus problemas sociais, económicos e de infraestruturas, denominada Baixada Fluminense. Entre os cursos oferecidos pelo IFRJ/Campus Nilópolis, o curso de Licenciatura em Matemática, que decorre em horário noturno (das 17:50h às 22:20h), tem a finalidade de fornecer a formação inicial de professores de Matemática, a qual habilita a sua atuação em qualquer instituição de ensino de Educação Básica, no território brasileiro.

Os participantes deste estudo são os estudantes que constituem a disciplina de Pré-Cálculo do curso referido anteriormente e, portanto, futuros professores de Matemática. A turma era composta por 46 estudantes inscritos, mas somente 22 deles frequentaram aulas dessa disciplina, sendo 14 do sexo masculino e 8 do sexo feminino. Eles indicaram que não tiveram experiência prévia com o *software* GeoGebra. Ademais, 85% deles indicaram não possuírem ainda conhecimento académico sobre os conceitos de limite e continuidade de funções. Entretanto, somente 16 desses estudantes permaneceram até o final da experiência de ensino, registando-se 6 desistências ao longo das aulas.

Apesar de todos buscarem o mesmo objetivo, que é obter a formação de professor de Matemática, estes estudantes apresentam características bastante distintas, o que torna a turma heterogénea, conforme se verifica na figura 5.1, cujos dados são obtidos a partir do questionário inicial.

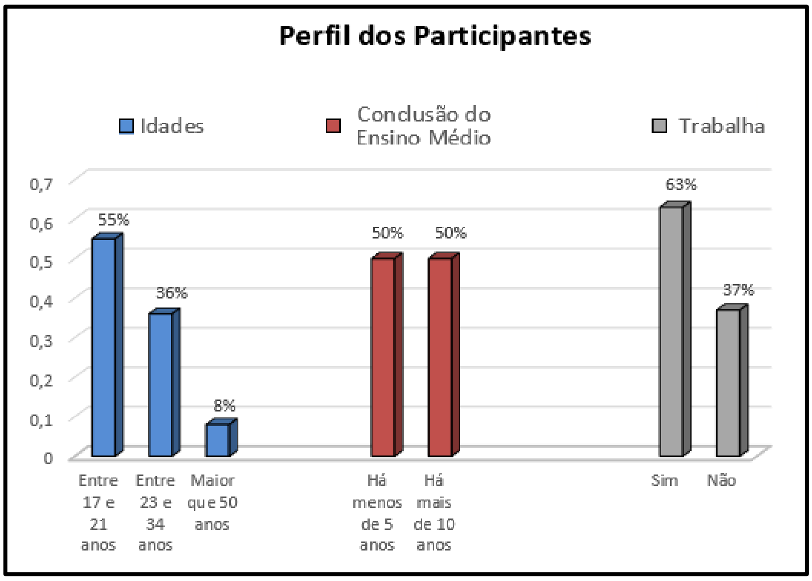


Figura 5.1 – Perfil dos participantes do estudo

Em primeiro lugar, verifica-se diversidade das idades dos estudantes da turma. Enquanto 55% são jovens que acabaram de (ou estão a) sair da adolescência, 36% já são jovens adultos com alguma experiência de vida. Somado a eles, apresenta-se dois estudantes com mais de 50 anos. Apesar da diferença entre as idades todos os estudantes apresentam-se perfeitamente integrados no ambiente da turma. Em segundo lugar, a diversidade no percurso escolar destes estudantes leva a inferir que os seus conhecimentos prévios da Matemática, são muito diferentes, uma vez que metade dos estudantes terminaram o ensino médio há mais de 10 anos enquanto a outra metade há pouco menos de 5 anos. Por fim, a generalidade dos estudantes (63%) está inserida no mercado de trabalho, nas mais variadas profissões, despendendo, em média, 8 h/dia de trabalho o que equivale a uma jornada de 40h semanais. Essa rotina diária de trabalho conduz a um tempo menor de dedicação às atividades de estudo extra classe, exigindo maior esforço e dedicação desse estudante nos momentos de sala de aula.

A minha perceção dessas características dos estudantes que compõem o perfil da turma é fundamental para o planeamento e execução dos momentos das aulas, buscando conduzi-las de forma dinâmica e motivante, criando um ambiente que propicie a participação e integração constante dos estudantes nas aulas, e os incentive a verbalizarem as suas dúvidas sobre aspetos relacionados à aprendizagem da Matemática para esclarecimentos, a fim de proporcionar um ambiente de sala de aula favorável ao ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos.

5.3. O processo de recolha de dados

A recolha de dados numa investigação qualitativa com base numa experiência de ensino é exaustiva, devido a se propor a descrever com grande precisão as interações em sala de aula, as aprendizagens dos estudantes e sua evolução e as reflexões do investigador durante o processo e o trabalho dos estudantes nos episódios (Bogdan & Biklen, 1994; Ponte, Brocado & Oliveira, 2013; Steffe & Thompson, 2000). A escolha adequada dos métodos de recolha de dados é de fundamental importância para a investigação e deve atender aos seus objetivos (Bogdan & Biklen, 1994).

A recolha de dados deve ser feita recorrendo a variados métodos disponíveis, como observação, recolha documental, entrevistas e questionários, entre outros (Creswell, 2007; Steffe & Thompson, 2000). Esses métodos devem ser usados no intuito de captar informações que, ao serem analisadas, permitam compreender de forma mais precisa as interações dos estudantes em sala de aula e responder às questões do estudo, enriquecendo e aumentando a qualidade da investigação (Bogdan & Biklen, 1994). Os métodos de recolha de dados que usei neste estudo, descritos e justificados a seguir, foram: a observação participante, a recolha documental, os questionários e as entrevistas semiestruturadas.

5.3.1. Observação participante

A observação numa investigação qualitativa consiste em obter informações que podem ser vistas, ouvidas ou sentidas diretamente pelo professor-pesquisador (Stake, 2011), visando examinar o ambiente de investigação e proporcionar a compreensão das ações, incluindo as espontâneas, dos investigados (Bogdan & Biklen, 1994). Como observador participante, o investigador assume uma postura ativa e participa das atividades que estão sendo estudadas. A observação participante caracteriza o investigador como parte do ambiente a ser investigado, seja apenas como observador na função de recolher dados para a sua pesquisa sem interferir no processo de investigação, seja como investigador-participante sendo responsável pela intervenção (Lüdke & Andre, 1986).

Uma forma de tornar a observação participante mais eficiente, segundo Bogdan e Biklen (1994), é utilizar a notas de campo que devem ser detalhadas, extensas e precisas. Estas notas de campo são "o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experimenta e pensa no decurso da recolha e reflete sobre os dados de um estudo qualitativo" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150). Sua utilização pode ajudar o investigador a "acompanhar o desenvolvimento do projeto, a visualizar como é que o plano de investigação foi afetado pelos dados recolhidos, e a tornar-se consciente de como ele ou ela foi influenciado pelos dados" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 151).

É fundamental que a recolha das informações no decurso da participação do professor-pesquisador na experiência de ensino seja complementada por gravações em áudio e vídeo. Para Steffe e Thompson (2000), esses instrumentos de recolha dos dados permitem que os investigadores acedam aos registos das experiências anteriores dos estudantes, sempre que quiser, como forma de auxiliá-lo na análise dos dados.

Neste estudo, a observação participante é garantida pelo meu papel de professor-pesquisador em cada uma das aulas da experiência de ensino. Como observador participante, pretendo observar as interações dos estudantes: (i) na resolução das tarefas, a fim de compreender aspetos de suas aprendizagens que me ajudem a realizar análise simultânea dos dados, repensar as tarefas a propor em sala de aula, a sua sequência e modo de implementação, e identificar possíveis candidatos para as entrevistas; e (ii) na exploração do GeoGebra a fim de compreender o seu contributo à compreensão dos estudantes sobre os conceitos matemáticos investigados. O registo das observações dos momentos das aulas, nomeadamente, da resolução das tarefas e da discussão coletiva e sistematização das aprendizagens, será feito por meio de gravações em áudio e vídeo e de notas de campos.

5.3.2. Recolha documental e de material visual

Os documentos são quaisquer materiais que possam ser usados como fonte de informação sobre o desempenho dos investigados, incluindo registos escritos da resolução de tarefas, entre outros (Bogdan & Biklen, 1994; Stake, 2011). Os documentos desempenham um papel fundamental na recolha de dados numa investigação qualitativa, permitindo: serem revistos inúmeras vezes e úteis na identificação de aspetos sobre a aprendizagem dos investigados, fornecer outros detalhes específicos para corroborar as informações obtidas através de outras fontes de dados e realizar inferências através de seu conteúdo (Bogdan & Biklen, 1994). O material visual, por sua vez, constitui registo em formato de imagem, como figuras, registos digitais em *software* computacionais, entre outros (Creswell, 2007).

Neste estudo, a recolha documental envolverá os registos escritos dos estudantes das resoluções de tarefas propostas ao longo da experiência de ensino, bem como as suas explorações nas *applets* do GeoGebra, que se constituem materiais visuais registados na forma digital. Com esses dados, pretendo obter informações sobre a compreensão dos estudantes sobre o limite e continuidade bem como o contributo do GeoGebra para essa compreensão.

5.3.3. Questionários

Um questionário constitui um conjunto de perguntas, afirmações ou escalas que deve ser respondido por escrito pelo inquirido, e visa capturar suas opiniões, crenças, experiências, impressões, entre outros (Stake, 2011). A elaboração de um questionário contempla questões abertas e/ou fechadas. Enquanto para responder às questões fechadas o inquirido deve escolher uma das alternativas proposta como resposta, nas questões abertas, essa escolha não existe, permitindo que ele construa livremente sua resposta (Tuckman, 2002). A opção pelo uso de questões fechadas ou abertas num questionário depende das opções teóricas assumidas pelo investigador, sendo recomendável o uso de questões abertas quando o investigador não possui conhecimento ou não consegue prever as possíveis respostas que poderiam ser dadas pelos inquiridos, e questões fechadas quando o investigador consegue construir uma lista de alternativas, adequada e suficiente aos propósitos do estudo, sobre o tema que pretende estudar (Tuckman, 2002).

Neste estudo, foram elaborados dois questionários, aplicados no início e no final da experiência de ensino. Como forma de assegurar a fiabilidade destes documentos e evitar constrangimentos aos estudantes em responder de acordo com a expectativa do professor-pesquisador, os questionários foram respondidos pelos estudantes de forma anónima. O questionário inicial (anexo 4) continha oitos questões (sendo uma fechada) e foi aplicado na primeira aula do semestre letivo. Seu objetivo era capturar informações a fim de conhecer o perfil acadêmico dos estudantes, nomeadamente, associado a aspetos relacionados com sua escolaridade, possíveis conhecimentos prévios dos estudantes acerca do limite e continuidade de funções e do software GeoGebra e sua expectativa sobre o curso e aspiração profissional após sua conclusão. Essas informações visavam ajudar-me no planeamento das *applets* do GeoGebra que seriam utilizadas na experiência de ensino.

O questionário final (anexo 5) é constituído de doze questões fechadas e sete abertas. Com as questões fechadas, solicito que os estudantes revelem o seu grau de concordância em relação a aspetos relacionados à experiência de ensino, nomeadamente, na resolução das tarefas exploratórias, no trabalho com o GeoGebra e no método de ensino exploratório, e as relações destes com suas aprendizagens ou dificuldades. Também incluo questões abertas como forma de permitir que os estudantes manifestem livremente suas opiniões sobre a experiência de ensino realizada, destacando aspetos que consideram positivos e negativos e sugestões que podem ajudar a melhorá-la para uma nova realização. Pretendo, assim, verificar a opinião dos estudantes sobre o trabalho realizado com a exploração das tarefas integradas ao GeoGebra, e que são fundamentais para uma reflexão sobre a experiência de ensino, a fim de verificar possíveis contributos com vistas a realização de nova experiência de ensino com êxito.

5.3.4. Entrevistas

As entrevistas são consideradas um importante método de recolha de dados de uma experiência de ensino que segue uma abordagem qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994; Cobb & Steffe, 1983; Steffe & Thompson, 2000). Trata-se de um relato verbal do indivíduo investigado aos problemas de viés, recuperação de informações e/ou de articulação imprecisa, sendo, portanto, importantíssimo o uso do gravador de áudio e/ou vídeo a fim gravar aspetos que poderiam passar despercebidos caso fossem utilizados outros procedimentos de recolha (Steffe & Thompson, 2000). No entanto, seu uso deve ser precedido de planeamento, nomeadamente, com a escolha do participante, do entrevistador e do momento (local e modo) de sua realização (Stake, 2011).

As entrevistas qualitativas variam quanto o grau de estruturação, em que existe um contínuo desde a entrevista *estruturada*, em que a sequência de questões e os procedimentos são organizados antecipadamente compondo um guião, tendo o entrevistador pouca liberdade para realizar alterações ao guião durante a realização da entrevista, até à entrevista *não estruturada*, onde o seu conteúdo e os procedimentos estão inteiramente nas mãos do entrevistador, emergindo do contexto imediato e não por um guião estruturado antecipadamente (Bogdan & Biklen, 1994; Lüdke & Andre, 1986).

A realização de entrevistas neste estudo se justifica pela necessidade de conhecer pormenorizadamente aspetos da compreensão dos estudantes sobre os conceitos de limite e continuidade, e do trabalho realizado, particularmente, na resolução das tarefas exploratórias, no trabalho com o GeoGebra e no método de ensino exploratório, a fim de para aprofundar ou clarificar possíveis aspetos das opiniões dos estudantes sobre a experiência de ensino. Assim, opto pela realização de duas entrevistas *semiestruturadas*, individualmente, com quatro estudantes, guiadas por um conjunto de questões organizado de forma flexível, que permite ao entrevistador ampliar alguns questionamentos à medida que as informações vão sendo fornecidas pelo entrevistado, e que não foram anteriormente consideradas (Lüdke & Andre, 1986). As entrevistas foram gravadas em áudio, sendo devidamente autorizadas pelos estudantes, e realizada em dias e horários que eles estivessem disponíveis e não os prejudicassem nas atividades letivas. Os seus encontros ocorreram numa sala do IFRJ/Nilópolis, com a presença apenas no investigador e do investigado, e tiveram duração média de 1h cada uma.

As entrevistas são realizadas em dois momentos no decurso da experiência de ensino: a primeira (anexo 2), após aplicação das cinco primeiras tarefas que visavam promover a aprendizagem sobre o limite no ponto e a segunda (anexo 3), após a conclusão da experiência de ensino. A primeira inicia-se com um conjunto de quatro questões relacionadas ao percurso académico, onde procuro perceber mais de perto sobre o interesse profissional do estudante pelo ensino da Matemática, e possíveis influências no seu percurso acadêmico. A seguir, três questões relacionadas à aprendizagem de limite no ponto, em que procuro perceber a compreensão dos estudantes sobre aspetos do conceito de limite trabalhados até então; tendo os estudantes sido desafiados a resolverem três problemas, onde era requerido seu conhecimento sobre o limite para reconhecer, refutar e corrigir erros em resoluções matemáticas que o envolve, justificando rigorosamente suas conclusões. Também busco obter a opinião dos estudantes sobre o trabalho exploratório realizado nas primeiras aulas do ensino do conceito de limite.

A segunda entrevista, foi dividida em duas partes. Na primeira parte, peço aos estudantes para descreverem sua experiência vivenciada com a resolução de tarefas exploratórias integrando o GeoGebra, destacando o pontos seus positivos e/ou negativos. Em seguida, na segunda parte, proponho-lhes que resolvam três questões sobre os conceitos de limite e continuidade de funções. Desta forma, com essa segunda entrevista procuro perceber mais de perto aspetos do conhecimento matemático dos estudantes, e possíveis contributos do trabalho exploratório realizado em sala de aula para esse conhecimento, a fim de aprofundar minha análise da aprendizagem com compreensão dos estudantes sobre o limite e continuidade e o papel do GeoGebra para essa compreensão.

A escolha dos estudantes que participaram nas entrevistas seguiu os seguintes critérios: (i) ter apresentado diferentes níveis de desempenho no estudo das funções reais, que antecederam o estudo dos limites e continuidade, a saber, dois estudantes com desempenho abaixo de 6,0 (média para aprovação) e dois acima de 7,0; (ii) ter demostrado interesse profissional pelo ensino da Matemática, a fim de contemplar possíveis futuros professores, e não considerar estudantes cuja pretensão era mudar de curso e seguir outra profissão, tal como verificado nas respostas do questionário inicial; (iii) ter apresentado alta frequência e participação nas aulas de funções e se comprometer a mantê-la na experiência de ensino; (iv) ter apresentado boa interação nas aulas, sendo comunicativo e questionador de suas dúvidas ou intuições; e (v) ser voluntário para participar da entrevista e estando de acordo com gravações. A opção por essas variáveis-serve para tentar garantir a diversidade dos dados e que os estudantes escolhidos se envolvam de facto com o processo de investigação, permitindo obter informações que me ajudem a responder às questões do estudo.

Em síntese, o processo de recolha de dados envolveu diversos momentos, com a utilização de diversos métodos, conforme apresento na tabela 5.1, nomeadamente, (i) observação dos episódios da experiência de ensino, que compreende os momentos de resolução das tarefas e discussão coletivas com os estudantes nas aulas; (ii) produções escritas dos estudantes, ao longo da experiência de ensino, relativamente a resolução das tarefas; (iii) questionários aplicados aos estudantes no início e no final da experiência de ensino; e (iv) duas entrevistas semiestruturadas com quatro estudantes da turma investigada. Acredito que esses métodos variados de recolha dos dados me permitirão, através de uma triangulação dos resultados obtidos, responder as questões de estudo.

Tabela 5.1 – Recolha de material empírico: métodos, fontes e formas de registo dos dados

Métodos	Fontes	Formas de Registo
Observação participante	Aulas + Professor	Notas de campo, gravação áudio e vídeo com transcrição
Recolha documental	Estudantes	Registos escritos da resolução das tarefas propostas nas aulas da experiência e registos digitais da exploração das tarefas no GeoGebra
Questionário	Estudantes	Questionário inicial e final
Entrevista	Estudantes (casos)	Gravação áudio com transcrição e registos escritos das resoluções de tarefas

5.4. O processo de análise dos dados

A análise dos dados de uma pesquisa qualitativa com base numa experiência de ensino é um processo de organização e reflexão sistemática dos dados recolhidos, que permite aumentar a sua compreensão e responder às questões de investigação, e envolve duas fases: *análise concomitante* e *análise retrospetiva* (Bogdan & Biklen, 1994; Creswell, 2007; Steffe & Thompson, 2000). A *análise concomitante* consiste num processo de interpretação contínuo dos dados durante o processo de investigação, desde o seu início e em simultâneo com a recolha dos dados, buscando extrair os seus significados com vista a preparar e facilitar a análise retrospetiva (Bogdan & Biklen, 1994; Creswell, 2007).

Neste estudo, a análise dos dados iniciou-se na fase de preparação da experiência de ensino, com a realização do estudo exploratório, cujos principais resultados encontram-se apresentados na secção 6.1. Esta primeira análise permitiu realizar ajustamentos e refinamentos das questões do estudo e do quadro de análise sobre a compreensão dos conceitos de limite e continuidade. Também permitiu identificar potencialidades das tarefas exploratórias integradas ao GeoGebra para a aprendizagem matemática e alguns contributos do uso do GeoGebra na aprendizagem do limite de funções, dando-me indicações de como a análise do papel desse *software* pode ser conduzida na experiência de ensino.

Após o término da recolha de todos os dados inicia-se a fase da *análise retrospetiva*, onde o pesquisador analisa os dados de forma mais profunda e estruturante, com base num conjunto de categorias, que visa permitir-lhe responder as questões do estudo (Bogdan & Biklen, 1994; Steffe & Thompson, 2000). Segundo Bogdan e Biklen (1994), as categorias constituem num meio de classificar os dados descritivos que foram recolhidos, podendo ser construídas a partir de pressupostos teóricos ou emergir dos dados à medida que estes forem sendo recolhidos.

Por ser a análise retrospetiva de uma experiência de ensino um processo denso e exaustivo, que requer maior cuidado e atenção por parte do pesquisador, Steffe e Thompson (2000) recomendam o uso das gravações em áudio e/ou vídeo de todos os seus episódios como forma de auxiliar o pesquisador nesta análise. Segundo esses autores, a análise cuidadosa das gravações em áudio e vídeo oferece ao pesquisador a oportunidade de ativar os registos das experiências passadas com os estudantes e torná-lo consciente dessas experiências, possibilitando-lhe uma visão mais aprofundada sobre as ações e interações dos estudantes que poderiam não ser salientes quando as interações ocorreram.

A análise retrospetiva dos dados seguiu uma estratégia de análise descritiva e interpretativa (Wolcott, 2009). Começo por identificar aspetos relevantes nos registos escritos da resolução das tarefas, nas entrevistas, nas gravações dos momentos das aulas e nas notas de campo, sobre os tópicos *significados*, *representações* e *resolução de problemas* os quais relacionam-se às categorias de análise. Em seguida, transcrevo diálogos dos estudantes, momentos de exploração das *applets* do GeoGebra e de interações entre o professor-pesquisador e os estudantes, os quais considero significativos e que se relacionam aos referidos tópicos. As gravações das aulas e das entrevistas foram transcritas parcialmente, contemplando os momentos que considerei pertinentes para a análise, com vista a responder às questões de estudo, após os ter ouvido e revisto diversas vezes. Depois, construo um relato narrativo e cronológico de cada tópico, integrando todos os dados a ele associado. Esse relato contempla descrições detalhadas da compreensão evidenciada pelos estudantes sobre os conceitos de limite e continuidade e do papel do GeoGebra para esta compreensão, incluindo excertos exemplificativos, retirados dos registos escritos dos estudantes na resolução das tarefas, de seus diálogos e explorações no GeoGebra nas aulas, das notas de campo, e das entrevistas, como forma de ilustrar as ideias, conclusões e explicações nas descrições.

Desta forma, procuro conduzir a análise dos dados de forma sistemática e rigorosa, respeitando a forma como os dados são registados ou transcritos. Além disso, considero fundamental perceber a opinião dos alunos sobre a experiência de ensino, particularmente, as tarefas propostas com recurso do GeoGebra, e seu papel na aprendizagem dos conceitos matemáticos. Por isso, recorro às entrevistas e ao questionário final que foi aplicado a todos os estudantes. A análise desses instrumentos é realizada após o término da experiência de ensino, e feita de forma descritiva e interpretativa, a partir da triangulação das respostas das questões neles contidas.

Tendo em conta que este estudo se propõe analisar que compreensão evidenciam os estudantes sobre os conceitos de limite e continuidade de funções, no decurso de uma experiência de ensino exploratório com recurso ao GeoGebra, e quais os contributos do GeoGebra para essa compreensão, a análise dos dados relativos à compreensão tem em conta os objetivos de aprendizagem do limite e continuidade de funções e baseou-se num referencial de três categorias, nomeadamente, os significados, as representações e a resolução de problemas, que são consideradas no quadro teórico como componentes dessa compreensão (figura 5.2). Essas categorias são descritas e sistematizadas nas tabelas 5.2, 5.3 e 5.4 e foram construídas com base nos referenciais teóricos da pesquisa.

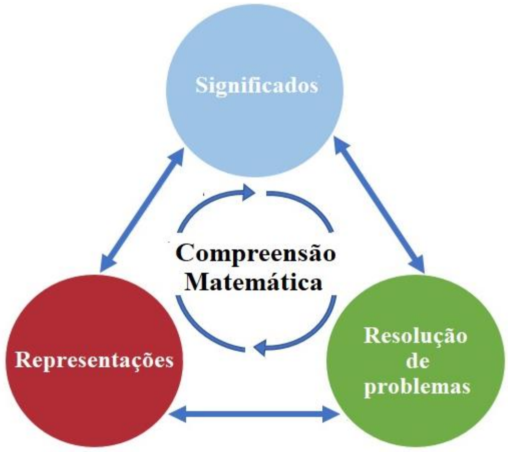


Figura 5.2 – Modelo Teórico das categorias de análise da Compreensão do limite e continuidade

Os *Significados* referem-se à análise dos aspetos mobilizados pelos estudantes do seu *conceito-imagem evocado* e *conceito-definição*, sobre os conceitos de limite e continuidade e que revelam a sua conceção sobre estes conceitos (Tall & Vinner, 1981). Essa categoria é analisada a partir de subcategorias que correspondem aos diferentes significados dos conceitos de limite e continuidade (tabela 5.2) e que estão presentes na literatura (e.g. Domingos, 2003; Fernández-Plaza et al., 2013; Juter, 2006; Messias & Brandemberg, 2015; Nair, 2010; Sealey et al., 2014; Tall & Vinner, 1981). Nas tarefas, são analisados os significados atribuídos pelos estudantes sobre esses conceitos matemáticos, que são apresentados em diferentes formas, nomeadamente, por notação algébrica, registos verbal, algébrico formal e geométrico, no cálculo algébrico, na aplicação de teorema, entre outros, a fim de obter uma caracterização do *conceito-imagem evocado* pelos estudantes sobre esses conceitos e perceber a relação dos significados com as aprendizagens.

Tabela 5.2: Categorias de análise dos significados dos conceitos de limite e continuidade

COMPONENTE DA COMPREENSÃO	SUB CATEGORIAS	DESCRIÇÃO
SIGNIFICADOS (conceito de limite)	**Imagem do ponto pela função**	Conceção do limite no ponto associado à imagem do ponto pela função
	Um processo dinâmico	Conceção de limite no ponto como um objeto matemático que se aproxima a um ponto ($L \rightarrow f(x_0)$)
	Resultado de um processo de aproximação inalcançável da $f(x)$, quando $L \neq f(x_0)$	Conceção dinâmica do limite no ponto como o valor inalcançável das imagens $f(x)$ de uma função f, à medida que os valores x do seu domínio se aproximam de x_0, quando $L \neq f(x_0)$
	Valor que revela sua existência	Conceção do limite ser alcançado pela função com base na conclusão de sua existência, ou seja, uma vez que o limite existe, ele é alcançado pela função
	Resultado de um processo de aproximação ao objeto	Conceção do limite no ponto como o valor resultante da aproximação das imagens $f(x)$ de função f, à medida que os valores x do seu domínio se aproximam de x_0 ($x \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x) \rightarrow L$)
	Resultado da igualdade dos limites laterais	Conceção do limite no ponto como resultado da igualdade dos limites laterais da função em x_0
	Resultado de correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança	Conceção do conceito de limite como resultado da implicação assentada na noção de vizinhança (ex. $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$)

	Declive da reta tangente ao gráfico da função	Conceção da *taxa de variação instantânea* de uma função caracterizada por associá-la ao declive da reta tangente ao gráfico da função
	Condição de existência de assíntota vertical ao gráfico da função	Conceção do limite infinito, caracterizada por relacioná-lo à existência de assíntota vertical ao gráfico da função em $x = x_0$
	Condição de existência de assíntota horizontal ao gráfico da função	Conceção do limite no infinito, caracterizada por relacioná-lo à existência de assíntota horizontal ao gráfico da função, quando $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$
SIGNIFICADOS (conceito de continuidade)	**Função cujo gráfico não possui interrupções**	Conceção intuitiva de função contínua, como aquela que seu gráfico não permite a existência de 'lacunas'
	Função que a cada ponto do seu domínio associa uma imagem	Conceção de função contínua associada a existência de $f(x)$ para cada $x \in D_f$
	Função definida por expressão analítica simples	Conceção de função contínua como aquela representada por uma fórmula algébrica que não admite partições do seu domínio expresso por diferentes expressões analítica
	Resultado da igualdade $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$	Conceção do conceito de continuidade com base na verificação dos três critérios de sua existência, nomeadamente, i) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$; ii) $\exists f(x_0)$; e iii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
	Existência do limite	Conceção de função contínua associada a existência de limite no ponto
	Funções contínuas preconcebidas	Conceção de função contínua com base no reconhecimento de que a função correspondente pertence a uma família de funções contínuas
	Resultado da definição formal de limite no ponto	Conceção formal do conceito de continuidade com base nas simbologias da definição formal de limite no ponto (L) tomando $L = f(x_0)$

Nas *Representações*, analiso a capacidade dos estudantes interpretarem, representarem e realizarem transformações (tratamentos e conversões) nas diferentes representações desses conceitos. Essa componente da compreensão do limite e continuidade é analisada a partir de três subcategorias (tabela 5.3), tendo por base a teoria dos registos de representações de Duval (1999; 2006): (i) Representações identificáveis, que permite analisar a capacidade dos estudantes em representar diferentes registos de representações desses conceitos (verbal, tabular, algébrico e geométrico); (ii) tratamentos, que analisa a capacidade de transformar uma representação em uma outra, mantendo-se o modo de registo; e (iii) conversões, que analisa a capacidade de transformar diferentes registos de representações, conservando o mesmo objeto (conceito matemático).

Tabela 5.3: Categorias de análise do trabalho com as representações do limite e continuidade

COMPONENTE DA COMPREENSÃO	SUB CATEGORIAS	DESCRIÇÃO
REPRESENTAÇÕES	**Reconhecimento de representação**	Identificar e concluir sobre o limite e continuidade em suas diferentes representações
	Construção de representações	Expressar registo de representação identificável do conceito de limite e continuidade
	Tratamentos	Expressar registo de representação dos conceitos de limite e continuidade a partir da transformação de uma de suas representações, não alterando o modo registo (ex. geométrico para geométrico)
	Conversões	Realizar conversão entre diferentes representações dos conceitos de limite e continuidade, caracterizada por mudar o modo de registo (ex simbólico para geométrico), e indicar as variáveis pertinentes aos registos mobilizados

A *Resolução de problemas* analisa a capacidade dos estudantes aplicarem os conhecimentos sobre esses conceitos matemáticos para resolver problemas que os envolve, nomeadamente, associados à análise de erros, provas matemáticas à validação de conjeturas matemáticas e aos problemas que apelam à modelação matemática (Ko & Knuth, 2009; Malaspina & Font, 2010; Strand, 2016). A análise resolução de problemas (tabela 5.4) tem em conta as tipologias dos problemas descritos e é realizada a partir de três subcategorias: (i) Análise de erros, analisa a capacidade de identificar, justificar e corrigir erros em expressões ou resoluções matemáticas associadas ao conceito de limite e continuidade; (ii) Provas matemáticas, analisa a capacidade de aplicar conhecimentos sobre esses conceitos matemáticos para provar ou validar proposições matemáticas; e (iii) Modelação matemática, que analisa a capacidade de aplicar conhecimentos sobre os conceitos na criação de modelo matemático que traduz uma situação e sua resolução.

Tabela 5.4: Categorias de análise da resolução de problemas que envolve os conceitos de limite e continuidade

COMPONENTE DA COMPREENSÃO	SUB CATEGORIAS	DESCRIÇÃO
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	**Análise de erros**	Identificar, justificar e corrigir erros em expressões ou resoluções matemáticas associadas ao limite e continuidade
	Provas matemáticas	Aplicar os conhecimentos sobre limite e continuidade para provar ou validar proposições matemáticas
	Modelação matemática	Aplicar os conhecimentos sobre o limite e continuidade na criação de modelo matemático que traduz uma situação real e resolvê-la

Relativamente ao papel do GeoGebra para a compreensão, foi analisado com foco nas suas potencialidades e limitações para a aprendizagem do limite e continuidade. Essa análise é orientada pelas dimensões da compreensão (significados, representações e resolução de problemas) e decorre das explorações que os estudantes realizam nas *applets* do GeoGebra e que foram conduzidas pelas questões das tarefas, por indicações do professor ou por iniciativa dos próprios estudantes.

Considerando as questões do estudo e tendo em conta alguns aspetos da revisão de literatura, para estruturar a análise dos dados e apresentar os resultados, opto por apresentar a análise da compreensão do limite nas suas dimensões e depois a continuidade, onde incluo resultados do papel do GeoGebra para a compreensão desses conceitos. A análise da compreensão levou em consideração as resoluções das tarefas pelos 16 estudantes que permaneceram até o final da experiência de ensino, enquanto o papel do GeoGebra decorreu da análise de explorações no GeoGebra realizadas pelos 4 estudantes que participaram das entrevistas e seus respetivos pares, e por alguns estudantes que interagiram com o professor-pesquisador nas aulas. As questões das tarefas foram selecionadas por atenderem às subcategorias de análise das componentes da compreensão, tendo em conta os objetivos de aprendizagem e são apresentadas respeitando a ordem cronológica pela qual ocorreram nas sequências de tarefas.

5.5. Questões éticas

Autores que discutem pesquisas qualitativas envolvendo estudantes têm salientado a importância de o investigador seguir algumas recomendações sobre questões éticas na condução de sua investigação, a fim de proteger os investigados contra quaisquer espécies de prejuízos e garantir a integridade da investigação (Bogdan & Biklen, 1994; Creswell, 2007; Stake, 2011). As recomendações apresentadas são baseadas em Códigos de Ética internacionais, que incorporam princípios e padrões de conduta esperados de investigadores em Educação em seus papéis profissionais.

O Código de Ética da AERA (2011), por exemplo, refere que os investigadores devem assegurar o anonimato e a cooperação voluntária dos investigados, a clareza e cumprimento dos acordos firmados com os investigados até a conclusão do estudo e a autenticidade e fiabilidade da publicação dos resultados da investigação, os quais também estão contempladas na Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação (IE) da Universidade de Lisboa – CEIEF (2016), elaborada especificamente para guiar o trabalho de seus investigadores.

A CEIEF (2016) também refere que, no início do trabalho de campo, o investigador deve informar os participantes sobre os objetivos e as atividades que serão desenvolvidas na investigação, a natureza voluntária de sua participação na pesquisa, ressalvando a possibilidade de desistência ou solicitação de alterações aos termos do acordado, ao longo da investigação, e todos os procedimentos respeitantes à recolha de dados, a fim de assegurar o consentimento informado dos participantes na pesquisa. Acrescenta, ainda, que a confiança e honestidade deverá caracterizar as relações entre o investigador e participantes, tomando precauções para proteger informação confidencial dos investigados, nomeadamente garantindo-lhes o anonimato.

Neste estudo, são contemplados os princípios e as orientações da CEIEF (2016), e do código de ética da AERA (2011), assumindo diferentes formas tanto no trabalho de campo como no processo de investigação. Relativamente ao pedido de autorização institucional para a realização da pesquisa, solicitei e obtive parecer favorável do diretor do IFRJ/ Nilópolis e do coordenador do curso de licenciatura em matemática (anexo 9), para a realização do estudo exploratório em 2015 e da experiência de ensino em 2016. Saliento que essas investigações fizeram parte de um projeto de pesquisa submetido e aprovados em editais de pesquisa do IFRJ, nomeadamente, o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica e Tecnológica (PIBICT)[13] e o Programa Institucional de

[13] O PIBICT é um programa do IFRJ que visa estimular pesquisadores a envolverem estudantes de graduação em atividades científica, tecnológica e artístico-cultural desenvolvidas no IFRJ, contribuindo para formação destes, e seu envolvimento no universo da pesquisa.

Incentivo à Produção Científica, Tecnológica e Artístico-Cultural (PROCIÊNCIA[14]) e tendo a presente pesquisa, sido aprovada pelo concelho de ética do IFRJ para ser realizada no IFRJ/Campus Nilópolis.

Também informei os estudantes do estudo exploratório e da experiência de ensino sobre o trabalho que seria realizado para o ensino dos conteúdos de Cálculo, nomeadamente, limite e continuidade de funções, explicando-lhes os principais objetivos e as atividades que pretendia realizar durante a experiência de ensino. No primeiro contato que tive com eles, pedi-lhes a disponibilidade para participarem como voluntários na investigação e a permissão para realizar a gravação em áudio e vídeo dos momentos de aplicação e discussão de tarefas em sala de aula. Esclareci-lhes que a participação não resultaria em quaisquer prejuízos para eles e que o seu anonimato seria garantido na publicação dos resultados (anexo 8). Após eu ter identificado potenciais estudantes às entrevistas que pretendia realizar, solicitei-lhes a disponibilidade de participação voluntaria e gravação em áudio das entrevistas, garantindo o seu anonimato e que possíveis informações confidenciais não seriam tornadas públicas e nem fariam parte da análise dos dados, a fim de garantir-lhes a integridade da pesquisa. Estava ainda garantida a utilização exclusiva de todos os dados no âmbito da pesquisa.

Quanto à honestidade da publicação dos resultados, a CEIEF (2016) sugere que o pesquisador deve conduzir suas atividades de investigação com transparência e rigor, não se envolvendo em falsificação ou distorção de dados. Desta forma, procuro nas publicações relacionadas a este estudo (tese, comunicações e artigos) descrever os pressupostos teóricos, procedimentos, dados e resultados de forma precisa e justificada, apresentando excertos das produções escritas ou verbais dos estudantes a fim de evidenciar as análises realizadas.

Por fim, tanto as normas da AERA (2011) quanto a CEIEF (2016) referem que o investigador deve tornar público, e aos investigados os resultados da sua investigação. Este aspeto é garantido pela natureza pública deste texto e de algumas publicações decorrentes de seus resultados parciais, nomeadamente, Fonseca & Henriques (2016; 2017; 2018a; 2018b; 2019), e por disponibilizar aos estudantes resultados parciais do estudo, a saber, em palestra ministrada ao corpo discente do curso de licenciatura em

[14] O PROCIÊNCIA é um programa institucional que concede recurso financeiro ao pesquisador, para despesa e custeio relacionados a sua pesquisa, visando contribuir para o desenvolvimento da mesma, especialmente aquela relacionada aos programas institucionais de pesquisa, como o PIBIC.

matemática, em comunicação apresentada na X Jornada de Iniciação Científica do IFRJ (X JIT[15]) e na publicação de artigos disponibilizado na versão eletrónica em canais de comunicação académica e científica do IFRJ, nomeadamente, nos Anais da X JIT e XI JIT e no livro eletrônico Experiências Exitosas no Ensino de Graduação do IFRJ da coleção *Cadernos Prograd IFRJ*[16] publicado pelo IFRJ aos quais os estudantes têm acesso.

[15] A Jornada de Iniciação Científica e Tecnológica (JIT) é um evento anual do IFRJ que ocorre desde 2006, e visa promover a integração entre professores, pesquisadores e estudantes do IFRJ, permitindo a divulgação, partilha e debate de pesquisas envolvidos nos Programas de Iniciação Científica e Tecnológica do IFRJ. Os Anais da X JIT e XI JIT podem ser acedidos em https://portal.ifrj.edu.br/jit-forum-ite-jpg/xi-jit-vi-forum-ite-i-jpg-2017.

[16] A coleção *Cadernos Prograd IFRJ* consiste numa coleção de livros eletrônicos organizado e publicado pela Pró-Reitoria de Ensino de Graduação (Prograd) do IFRJ, cujo obtido é promover a comunicação acadêmica/científica do IFRJ e contribuir para a reflexão sobre as principais temáticas pertinentes ao ensino de graduação do IFRJ. Os livros podem ser acedidos em https://portal.ifrj.edu.br/cadernos-prograd.

Capítulo 6

A experiência de ensino

Neste capítulo apresento a experiência de ensino que foi implementada e serviu de base a este estudo. Começo por descrever o contexto e aspetos gerais da disciplina de Pré-Cálculo, onde foram realizados tanto o estudo exploratório quanto a experiência de ensino. A seguir descrevo o estudo exploratório, seus objetivos, aspetos metodológicos e principais resultados, o qual serviu de preparação para a experiência de ensino. Por fim, apresento a experiência de ensino, referindo a sua planificação que inclui uma descrição das sequências de tarefas e estratégias de ensino utilizadas e descrevo, de forma geral, como decorreu sua concretização.

6.1. Contexto e aspetos gerais da disciplina de Pré-Cálculo

A experiência de ensino desenvolvida nesta investigação, assim como o estudo exploratório que apoiou a sua preparação, foram realizadas no âmbito da unidade curricular de Pré-Cálculo, integrada no 1º semestre do curso de Licenciatura em Matemática, do IFRJ/Campus Nilópolis. Trata-se de uma unidade com 6 aulas semanais de 45 minutos cada. Para além disso, é uma unidade obrigatória do referido curso, tendo como principal objetivo estabelecer as bases de matemática elementar que possibilita a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

Nesta unidade curricular abordam-se tópicos referentes aos fundamentos matemáticos de limite de funções reais de uma variável real, indispensáveis ao acompanhamento de diversas disciplinas do curso, como sejam o Cálculo Diferencial e Integral I, II e III e a Análise Real, entre outras. O programa curricular desta disciplina é elaborado e aprovado pelos professores do Colegiado do Curso. No anexo 6, apresento uma cópia do referido programa que estava em vigor no ano em que decorreram os estudos que apresento e que se mantém atualmente, integrando os seguintes tópicos:

- **Funções:** Definição, domínio, imagem, gráfico. Funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras. Função composta e função inversa.
- **Funções especiais:** polinómios, logaritmos e exponenciais, trigonométricas e trigonométricas inversas.
- **Limite:** definição, teoremas sobre limite, limite no infinito, limite infinito, limites fundamentais e formas indeterminadas.
- **Continuidade de funções:** definição de continuidade de função num ponto e num intervalo, propriedades das funções contínuas e o Teorema do Valor Intermédio (TVI).

Comumente, o ensino dos conteúdos da disciplina de Pré-Cálculo tem sido conduzido por uma abordagem de ensino direto (Ponte, 2005), onde os conceitos matemáticos são trabalhados pelo professor da seguinte maneira: (i) introdução do conceito, por meio de definições e demonstrações; (ii) exemplificação do conceito, por meio de exemplos e exercícios resolvidos e explicados no quadro; e (iii) consolidação da aprendizagem do conceito, por meio de lista de exercícios para treino e memorização de procedimentos, para ser resolvida pelos estudantes, fora do ambiente de sala de aula.

O planeamento dessa disciplina é normalmente elaborado pelos professores, e composto de duas partes principais (tabela 6.1): o estudo das funções reais (primeira parte) e o estudo de limite e continuidade de funções reais (segunda parte). A primeira parte do curso é dedicada ao estudo das principais funções reais, nomeadamente, funções polinomiais, racionais, modular, potências, raízes, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e trigonométricas inversas. É feita uma revisão dos principais conceitos relacionados a essas funções, preparando os alunos para a aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade. São trabalhadas as ideias de domínio, contradomínio e imagem de funções, equações algébricas e transcendentes, bem como um estudo aprofundado das características, construção de gráficos e principais propriedades das diversas funções. Apliquei nesta primeira uma tarefa exploratória com recurso ao GeoGebra, para promover a aprendizagem da função quadrática. A aplicação dessa tarefa seguiu a abordagem de ensino exploratório (Canavarro, 2011) e visava preparar os estudantes para a experiência de ensino, uma vez que eles não estavam habituados a esta abordagem de ensino.

Tabela 6.1 – Programa da disciplina de Pré-Cálculo – Parte I

Nº	Tópicos	Conteúdos
1º	Conceitos de Função	• Definição, notações, representações, domínio, imagem, gráfico • Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas • Função composta e função inversa.
2º	Funções especiais I	• Função Polinomial • Função Modular • Função Racional •
3º	Funções especiais II	• Função Potência • Função Raiz
4º	Funções especiais III	• Função Exponencial • Função Logarítmica
5º	Funções especiais IV	• Funções Trigonométricas (funções seno, cosseno, tangente, secante, cotangente e cossecante) • Funções Trigonométricas inversas

Os conteúdos dessa primeira parte são distribuídos ao longo de cinco tópicos. O 1º tópico é dedicado ao estudo introdutório das principais características e propriedades das funções reais que serão estudadas ao longo do curso. No 2º tópico são estudadas as funções Polinomiais e Racionais, incluindo o estudo de suas principais propriedades, construção e análise de gráficos e métodos de determinação de raízes. O 3º tópico é dedicado ao estudo da função Potência ($f(x) = x^r, r \in \mathbb{R}$) e função Raiz ($f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x},\ \ n \in \mathbb{N}$)[17], compreendendo o estudo dos diversos casos da família destas funções, determinada pela variação de $n \in \mathbb{N}$. No 4º tópico é realizado o estudo das funções exponencial e logarítmica, abordando principalmente o crescimento exponencial com vista à sua aplicação à Matemática Financeira e à Física e Química. Por fim, o 5º tópico contempla o estudo das funções trigonométricas e suas principais propriedades. Toda a primeira parte da disciplina dedica-se a reforçar as principais ideias sobre as funções reais, que serão necessárias ao estudo de limite e continuidade.

Na segunda parte da disciplina são introduzidas as primeiras ideias do Cálculo, os conceitos de limite e continuidade de funções (tabela 6.2). Como no Brasil o currículo do Ensino Médio (nível de ensino que antecede o nível superior) não contempla o ensino desses conceitos (BRASIL, 2006; 2018), esta é a primeira vez que os estudantes têm

[17] Adota-se neste estudo o símbolo ℕ para descrever o conjunto dos números naturais sem a inclusão do número zero (Lima, 2006). Assim, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

contacto com estas ideias do Cálculo. Por isso, e com base nos referenciais teóricos da pesquisa, entendo que o ensino das *noções intuitivas*, do *cálculo algébrico* e da *definição formal* de limite e continuidade deva ser muito bem trabalhado, a fim promover um sentido mais completo dos conceitos envolvidos, neste nível de ensino, pois a aprendizagem desses conceitos constitui um pré-requisito para o avanço dos estudantes, no seu percurso escolar, para uma aprendizagem mais formal e rigorosa do Cálculo (Swinyard & Larsen, 2012; Tall et al., 2008).

Tabela 6.2 – Programa da disciplina de Pré-Cálculo – Parte II

Nº	Tópicos	Conteúdos
6	Limite de Funções	• Noção intuitiva e cálculo de limite no ponto • Operações com limite no ponto • Limites laterais • Limites infinitos e assíntota vertical • Limites no infinito e assíntota horizontal • Formas indeterminadas • Limites fundamentais (limite trigonométrico, limite exponencial e limite logaritmo)
7	Continuidade de Funções	• Continuidade em um ponto (noção intuitiva e definição) • Propriedades de funções contínuas • Continuidade num intervalo • Teorema do Valor Intermédio – TVI

Nesta segunda parte da disciplina de Pré-Cálculo, os conteúdos estão distribuídos por dois tópicos, nomeadamente, 6º e 7º tópicos. O 6º tópico é dedicado ao ensino do *limite no ponto*, *limite infinito* e *limite no infinito*, compreendendo suas respetivas *noções intuitivas, cálculo algébrico* e *definição formal* e principais propriedades. No 7º tópico é realizado o estudo da continuidade de funções reais, contemplando os critérios de continuidade de uma função, propriedades das funções contínuas e seu uso como pressuposto de aplicabilidade do TVI, que também são abordados a partir das *noções intuitivas*, o *cálculo algébrico* e a *definição formal* da continuidade de funções.

O processo de avaliação na disciplina de Pré-Cálculo é definido pelo próprio professor. Entretanto, a coordenação do curso de Licenciatura em Matemática sugere que sejam utilizados no mínimo duas avaliações escolhendo entre trabalhos, seminários, provas, entre outros, para a classificação dos estudantes. Para ser considerado aprovado, o estudante tem de obter média final (M_F) de no mínimo 6,0 numa escala de 0 até 10,0 valores. Um estudante, que no final das aulas de Pré-Cálculo tenha obtido média (M_a)

entre 4,0 e 6,0 valores, será submetido a uma avaliação final (A_F) onde poderá obter aprovação desde que alcance o mínimo de 6,0 valores como média final (M_F) calculada por $M_F = \frac{M_F + A_F}{2}$. Embora não seja foco deste estudo, esclareço que a classificação final dos estudantes contemplou média aritmética de três avaliações, a saber: uma prova escrita no final do estudo de funções, e duas tarefas de avaliação, uma aplicada no final do estudo de limite e outra no fim do estudo de continuidade.

A seguir apresento uma descrição do estudo exploratório.

6.2. A preparação da experiência de ensino: o estudo exploratório

6.2.1. Objetivos

O estudo exploratório foi desenhado para servir de ligação entre o referencial teórico da pesquisa e a realização do estudo principal (experiência de ensino), contribuindo para a definição das suas principais características. Tem, por isso, três objetivos principais:

O primeiro objetivo é analisar as aprendizagens dos estudantes sobre a existência de limite no ponto e se o limite é alcançado (atingido) pela função, os quais constituem-se aspetos associados aos conceitos de limite e continuidade de funções, e também identificar possíveis dificuldades que se revelam no início do ensino desses conceitos, a fim de ensaiar uma primeira análise de dados que me ajude a construir um quadro de análise da compreensão para o estudo principal.

Essa análise será centrada em aspetos referidos na literatura que se constituem como objetivos de aprendizagem dos estudantes sobre o conceito de limite de funções no ponto, nomeadamente, (i) reconhecer a existência do limite no ponto; (ii) reconhecer que o $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ é alcançado (atingido) pela função f; (ii) calcular o valor do $\lim_{x \to x_0} f(x)$ por meio de procedimentos algébricos; (iv) reconhecer indeterminação $\frac{0}{0}$ no cálculo algébrico do limite no ponto; (v) aplicar conhecimentos sobre o conceito de limite na resolução de problemas que o envolve. Esta análise pode revelar algum aspeto do conceito de função que precisa ser considerado na construção das tarefas da experiência de ensino, como forma de promover a aprendizagem do limite e continuidade de função.

O segundo objetivo é a avaliação de tarefas exploratórias com recurso ao GeoGebra, e que serão consideradas na experiência de ensino. Pretendo verificar se o uso de tarefas exploratórias com recurso ao GeoGebra permite promover a aprendizagem dos estudantes sobre o limite de funções, e revelar os aspetos da sua compreensão que serão foco de análise neste estudo. Além disso, o estudo exploratório pode confirmar se as explorações nas *applets* do GeoGebra permitem aos estudantes realizarem o que lhes é proposto e se isso promove suas aprendizagens.

O terceiro objetivo refere-se à avaliação e eventual refinamento das questões iniciais da investigação e que foram pensadas com base na revisão de literatura sobre o ensino e aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade de função, mas que podem precisar de delimitação ou foco distinto para permitir um aprofundamento das mesmas.

Em suma, o estudo exploratório, ainda que de forma preliminar, objetiva não só estabelecer um diálogo preliminar com o referencial teórico da investigação como também fornecer informações substanciais para o desenho da experiência de ensino.

6.2.2. Aspetos metodológicos

Este estudo exploratório foi realizado no 1º semestre do ano letivo de 2015, com 28 estudantes que frequentavam a disciplina de Pré-Cálculo do curso de Licenciatura em Matemática do IFRJ/Nilópolis. Estes estudantes eram todos iniciantes do referido curso, sendo que cerca de 90% deles não possuíam ainda conhecimento sobre o limite de funções, nem tinham experiência prévia com o software GeoGebra.

O estudo envolveu uma combinação de aulas dedicadas à observação participante, à aplicação de uma sequência de tarefas de exploratórias com recurso ao GeoGebra e um teste final. Todas as aulas foram realizadas dentro do horário da turma. O investigador, por não ser o professor titular da turma, assumiu inicialmente o papel de observador em 12 aulas de 45 min cada, ministradas pela professora titular sobre o ensino de funções reais. Essas aulas, que antecederam o ensino do conceito de limite, de caráter expositivo, foram destinadas ao ensino de funções reais. Não foram trabalhadas tarefas exploratórias ou usado o GeoGebra nessas aulas. A observação dessas aulas permitiu a entrada do investigador, no ambiente a ser investigado.

No ensino do conceito de limite, o investigador assumiu a condição de professor da turma, sendo devidamente autorizado pela professora titular. Nesse momento da pesquisa o investigador passou a desempenhar o duplo papel de professor-investigador (Steffe & Thompson, 2000). Na condição de professor-investigador foram realizadas 24 aulas de 45 min cada, sequencialmente, não havendo interrupção deste duplo papel. O investigador teve a ajuda do monitor do Laboratório de Aplicações Computacionais (LAC) para registar os encontros por meio da gravação em vídeo. A participação desse monitor foi necessária a fim de auxiliar o investigador na captação em vídeo, do momento de investigação, sem decidir ou interferir sobre o melhor momento da gravação.

A dinâmica das aulas onde foram aplicadas as tarefas, desenvolveu-se em três momentos principais: A apresentação da tarefa; a sua resolução autónoma pelos estudantes, organizados em grupos (pares e trios), no laboratório de informática; e a discussão coletiva das tarefas com a sistematização das aprendizagens num momento seguinte. As aulas foram divididas em três etapas:

1ª Etapa: A primeira etapa consistiu na realização de 4 aulas sobre a introdução ao conceito de limites de funções reais. As aulas ministradas tiveram caráter 'expositivo-participativo', isto é, o professor-investigador introduziu o conteúdo interpelando os estudantes sobre a compreensão das ideias apresentadas e estes, por sua vez, participavam da aula levantando seus questionamentos e resolvendo os exercícios propostos. Simultaneamente à condução das aulas, o professor-investigador recorreu à utilização de cinco *applets*, construídos por si, a partir do GeoGebra e projetados por um *datashow*, no intuito de promover o desenvolvimento das noções intuitivas de limite no ponto e o reconhecimento da notação algébrica desse limite.

2ª Etapa: A segunda etapa consistiu na aplicação de uma sequência de três tarefas exploratórias integrando o GeoGebra. O objetivo dessa sequência de tarefas foi promover as aprendizagens sobre dois aspetos do conceito de limite, nomeadamente: (i) a existência de limite no ponto, e (ii) que o limite é alcançado pela função. Essa sequência foi realizada ao longo de 12 aulas, sendo conduzida pelo professor-investigador, em dois momentos: No primeiro momento, ocorreu a aplicação da tarefa no laboratório de informática, onde os estudantes resolviam as tarefas em grupos (pares ou trios), tendo auxílio de *applets* do GeoGebra. No segundo momento, após a aplicação da tarefa, ocorreu uma discussão coletiva, professor-investigador e estudantes, das principais ideias trabalhadas na aplicação da tarefa, tendo o professor, neste momento, realizado reflexão em torno das principais dificuldades evidenciadas pelos estudantes deste momento.

3ª Etapa: Após a aplicação da sequência de tarefas foi aplicado um teste, respondido individualmente pelos estudantes e sem o uso do GeoGebra, a fim de verificar se o trabalho desenvolvido permitiu aos estudantes: (i) alcançarem ou não aprendizagem sobre a existência de limite no ponto e sobre se o limite é atingido (alcançado) pela função, e (ii) superarem ou não as dificuldades apresentadas ao longo das aulas, sobre essas ideias. Simultaneamente à aplicação do teste foi aplicado um questionário contendo duas questões no intuito de verificar a opinião dos estudantes sobre o trabalho realizado com a exploração das tarefas integradas ao GeoGebra.

Os dados foram recolhidos a partir das produções escritas dos estudantes às tarefas, das gravações em áudio e vídeo dos episódios de aula, das notas de campo do professor-investigador decorrentes da observação participante, do teste e do questionário aplicado no final do estudo. A análise dos dados foi realizada através da triangulação dos mesmos e centrada em aspetos referidos na literatura que se constituem como objetivos de aprendizagem dos estudantes sobre o conceito de limite de funções (tabela 6.3).

Tabela 6.3 – Objetivos de aprendizagem sobre a existência de limite de funções num ponto (Biza & Zacharides 2010; Cornu, 1991; Juter, 2006; Nair, 2010)

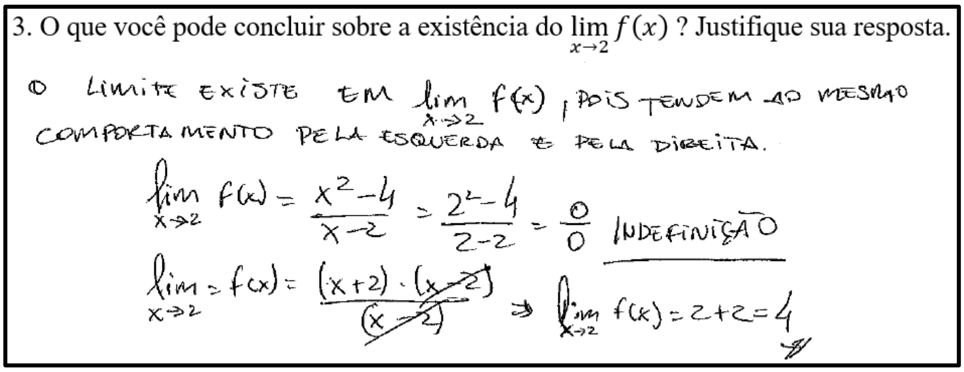
Objetivos de aprendizagem	**Ações verificadas**
Reconhecer a existência do limite no ponto	• Identificar o comportamento convergente das imagens $f(x)$ de uma função à $L \in \mathbb{R}$, quando $x \to x_0$, e concluir a existência de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ • Interpretar se o limite é alcançado pela função
Reconhecer que o $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ é alcançado (atingido) pela função f	• Identificar o comportamento convergente das imagens $f(x)$ de uma função à $L \in \mathbb{R}$, quando $x \to x_0$ • Interpretar que o $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ é alcançado pela função f
Calcular o valor do $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ por meio de procedimentos algébricos	• Aplicar técnicas algébricas para resolver $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
Reconhecer a indeterminação $\frac{0}{0}$ no cálculo algébrico do limite no ponto	• Identificar que o resultado do cálculo de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \frac{0}{0}$ é indeterminado
Aplicar conhecimentos sobre o conceito de limite na resolução de problemas que o envolve	• resolver problemas que envolvem a aplicação da taxa de variação instantânea de uma função no ponto x_0

Na secção seguinte apresentamos os resultados da análise dos dados do estudo exploratório, evidenciados em excertos do trabalho realizado pelos estudantes, cujos nomes são fictícios, na resolução das tarefas (designadas por Q- questão da tarefa e T-tarefa).

6.2.3. Principais resultados

Sobre o primeiro objetivo, os resultados indicam que, no final do estudo exploratório, a generalidade dos estudantes foi capaz de reconhecer o comportamento das imagens $f(x)$ de uma função f em torno de $x = x_0$ e usar essa aprendizagem para justificar a existência de limite no ponto. Para justificá-la estes estudantes recorreram às suas conceções intuitivas do limite como *resultado de um processo de aproximação ao objeto, da igualdade dos limites laterais* e/ou *do cálculo algébrico*, articulando as diferentes representações do mesmo objeto, nomeadamente, a representação verbal, algébrica, geométrica e notação algébrica do limite no ponto.

Verifica-se também que a grande maioria dos estudantes conseguiu calcular o valor do limite da função através de procedimentos algébricos, quando a expressão analítica da função estava explícita, mesmo quando previamente era necessário reconhecer o tipo $\frac{0}{0}$ de indeterminação de limite de funções racionais, tal como exemplificado pela resposta do par Edgar e Eduardo na Q_3T_1 (figura 6.1).



3. O que você pode concluir sobre a existência do $\lim_{x \to 2} f(x)$? Justifique sua resposta.

O LIMITE EXISTE EM $\lim_{x \to 2} f(x)$, POIS TENDEM AO MESMO COMPORTAMENTO PELA ESQUERDA E PELA DIREITA.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0} \text{ INDEFINIÇÃO}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{(x+2)\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 2+2=4$$

Figura 6.1 – Resposta do par Edgar e Eduardo à Q_3T_1

Entretanto, quando foram desafiados a encontrar expressão algébrica que define a função para posteriormente calcular o limite, grande parte dos estudantes apresentou dificuldade no domínio da Álgebra. As principais dificuldades evidenciadas foram no trabalho com variáveis em expressões algébricas e na manipulação algébrica para simplificação de expressões, fatorização de polinómios e resolução de equações cúbicas, as quais impediram a aplicação da taxa de variação instantânea de uma função para resolver problemas que a envolve, nomeadamente, obter o declive da reta tangente ao gráfico de uma função em $x = x_0$ (T_2), e determinar as medidas do volume de uma caixa de formato paralelepípedo modelado matematicamente (T_3).

A fragilidade desses estudantes no domínio dos processos e procedimentos da Álgebra é comprovada pela resposta da aluna Karina que, no momento da discussão coletiva da tarefa T_2, que conduzia à dedução da taxa de variação instantânea, e após os estudantes serem indagados pelo professor sobre quais as dificuldades sentiram na realização da tarefa, ela respondeu:

> **Karina:** A minha dificuldade foi ao observar ali que não tinha número, tinha que botar tudo letra. E a gente se cobrava para botar número e não botar letra. Aí ficava meio embolado [...].
>
> **Professor:** Ou seja, trabalhar com expressões literais, expressões algébricas. [...].
>
> **Karina:** Sim. Mas na minha cabeça só vem que tinha que achar número! Parece que a mente está preparada somente para achar número.

Essa fragilidade algébrica sinaliza a necessidade de uma preparação mais adequada dos estudantes do estudo principal nos processos e procedimentos do campo algébrico, antes do ensino dos conceitos do limite e continuidade de funções, a fim minimizar possíveis dificuldades neste campo que se possam tornar um obstáculo à compreensão desses conceitos matemáticos. Desta forma, sinto a necessidade de aprofundar alguns aspetos, no campo da álgebra, mais detalhadamente, como as noções de domínio, contradomínio e imagem de funções, esboço de gráfico de funções reais, operações e procedimentos algébricos elementares como operações com expressões literais, factorização de polinómios, resolução de equações, entre outros.

Sobre o limite ser atingido pela função, os resultados mostram que a conceção errónea do limite como *a imagem do ponto pela função* foi a causa dessa ideia não ter sido compreendida pelos estudantes. Essa conclusão foi confirmada pelo estudante Alexandre que justificou que o limite não é alcançado pela função "porque o ponto $y = 4$ está aberto" (referindo ao fato da função não está definida para no ponto $(2,4)$), como é possível perceber na transcrição de um diálogo entre o professor e os estudantes no momento da discussão coletiva da tarefa T_1.

> **Professor:** Falar de limite da função num ponto sempre será falar da imagem da função nesse ponto?
>
> **Jonas:** Não.
>
> **Professor:** Então eu te pergunto: Essa justificativa aqui [porque o ponto $y = 4$ está aberto] está correta?

Nesse momento, todos os estudantes passaram a refletir com base no questionamento do professor, que após alguns segundos complementa:

> **Professor:** Porque dizer que não existe limite da função no ponto $x_0 = 2$, só pelo fato da imagem $y = 4$ está "aberto" [no gráfico] é estar com dificuldade na compreensão do limite [...]. Pra mim existe limite toda vez que existe a imagem da função. Não é essa ideia que estava na sua cabeça?
>
> **Alexandre:** Sim.

Mesmo após a sistematização dessa aprendizagem realizada pelo professor, os registos apresentados pelos estudantes na resolução tarefa T_2, mostram que essa ideia não foi totalmente consolidada pelos estudantes pois, cerca de $\frac{2}{3}$ deles apresentaram justificativas baseadas apenas na existência do limite no ponto, concebendo ainda a ideia de que, para o limite ser alcançado a função precisa ser definida no ponto x_0. Estes estudantes não conseguiram superar o obstáculo sobre a dúvida do limite ser alcançado pela função, tal como se exemplifica na resposta de Alan e Jean (Figura 6.2).

$\boldsymbol{Q_6T_2}$**:** Quando esse valor existe, a inclinação (declive) da reta tangente é alcançada pela aproximação das inclinações (declives) das retas secantes? Porquê?
Sim, pois a reta secante está diretamente ligada ao ponto Q, e para calcular a inclinação da reta t, devemos colocar o ponto Q sobre a reta t e dessa forma as retas alinham e possuirão a mesma inclinação.

Figura 6.2 – Resposta do par Alan e Jean à Q_6T_2

O alto número de estudantes, que após o estudo exploratório ainda permaneceram com dúvidas sobre o limite ser alcançado pela função, sinalizam a necessidade de se fortalecer o ensino de limite no ponto, com base nas noções de vizinhanças $V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$. Como neste estudo, a maior ênfase do ensino de limite foi baseado na noção do limite como resultado da aproximação do objeto ($x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to L$), percebemos o quanto foi difícil para os estudantes conceber $f(x) = L$, quando $f(x_0)$ não estava definida, uma vez que muitos deles ainda concebiam $L = f(x_0)$.

Estes resultados revelaram que as dificuldades dos estudantes na aprendizagem do conceito de limite resultam de incompreensões sobre ele, nomeadamente, conceções erróneas sobre o conceito de limite, fragilidade na transformação (tratamento e conversão) de suas diferentes representações, especialmente sobre representações algébricas, e incapacidade de mobilizar conhecimentos sobre o limite para resolver problemas que o envolve. A triangulação desses resultados com os pressupostos teóricos levou-me a considerar, na experiência de ensino, o desenvolvimento da compreensão dos conceitos como forma de promover aprendizagens mais efetivas, o que resultou em ajustamento e refinamento das categorias de análise do estudo.

Em relação ao segundo objetivo do estudo exploratório, os resultados apontam que a sequência de tarefas exploratórias integradas ao GeoGebra se revela como um mecanismo de ensino que permitiu aos estudantes mobilizarem conhecimentos matemáticos prévios, relativos às funções e a Álgebra, na resolução das tarefas e aprofundá-los, reforçando deste modo as suas aprendizagens, tal como exemplificado pelo diálogo entre o professor e o par Karina e Priscila, num momento de exploração do GeoGebra para resolver a tarefa T_3 (Figura 6.3) .

Professor: Como você acha o volume de um paralelepípedo?
Priscila: É a área da base multiplicada pela altura [indica na *applet* as dimensões da caixa].
Karina: Aqui vale 3, aqui vale 3. Então [$3 + 3 = 6$] Aqui, a largura vale 4 cm [indica as dimensões da caixa na *applet*].
Professor: Beleza! Numericamente falando é isso aí! E agora, em função de x quanto mede essa largura do paralelepípedo?
Karina: Bom, isso aqui é 10 cm [...] [indica na *applet* a largura da caixa]. A largura vai ser $10 - 2x$ e o comprimento também, pois é o lado de um quadrado! [confere na *applet* a igualdade da largura e comprimento da caixa]
Professor: Escreve isso aí! Agora falta somente a expressão da altura da caixa.
Karina: Se eu dobrar a folha para formar a caixa, eu terei como altura da caixa o valor de x![recorre a planificação da caixa na *applet*]
Professor: Agora que vocês têm as três medidas, qual é a expressão do volume dessa caixa?
Priscila: É esse [$10 - 2x$], vezes esse [$10 - 2x$], vezes esse [x]! [indica na *applet*].
Professor: Beleza!
Priscila: Princípio básico né, determinar a base [comprimento], altura e largura da caixa.

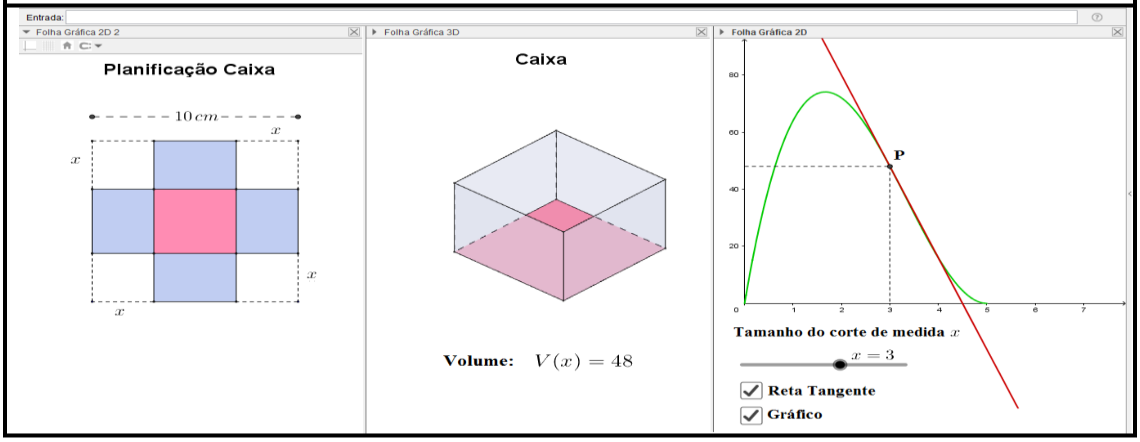


Figura 6.3 – Exploração no GeoGebra realizada pelo par Karina e Priscila durante o diálogo com o professor

Torna-se evidente, no diálogo, o contributo da *applet* do GeoGebra para o enriquecimento da visão geométrica bidimensional e tridimensional das estudantes, permitindo-lhes deduzirem propriedades matemáticas dos paralelepípedos na determinação das medidas de suas dimensões – "A largura vai ser $10 - 2x$ e o comprimento também, pois é o lado de um quadrado!" – contribuindo para a dedução da expressão algébrica do volume da caixa: "É esse $(10 - 2x)$, vezes esse $(10 - 2x)$, vezes esse (x)! $(\dots)$. Princípio básico né, determinar a base [comprimento], altura e largura da caixa."

Os dados também revelam que à medida que resolviam as tarefas exploratórias e, de forma integrada, manipulavam as *applets* criadas a partir do GeoGebra, os registos de respostas dos estudantes às questões das tarefas sofreu progresso positivo, passando de simples respostas verbalizadas, frequentemente incompletas ou desprovida de coerência, para respostas articulando diferentes representações associadas ao mesmo objeto (conceito de limite), indicando assim que a aprendizagem para esses estudantes, tornou-se positiva. Na tarefa T_3, que consistiu num problema de modelação matemática, os estudantes em geral, beneficiaram do trabalho realizado e dos temas abordados nas tarefas anteriores, reforçando deste modo as suas aprendizagens.

Salienta-se ainda a necessidade de reformulação de algumas questões das tarefas a fim de se adequar ao tempo de aplicação (aproximadamente 1 hora cada) e clarificar alguns termos que geraram dúvidas nos estudantes, a fim de que possam ser utilizadas na experiência de ensino. Por exemplo, na tarefa T_3, que apresentou um número significativo de estudantes com dificuldades na formalização algébrica do volume da caixa, senti a necessidade de reformulá-la, incluindo questões em que sejam fornecidos alguns valores numéricos de cortes x, a fim de que os estudantes realizem testes experimentais de construção de algumas caixas, e possam generalizá-los para determinar a expressão algébrica da função que modela o volume da caixa, a partir do corte de medida x.

Ademais, o trabalho de investigação com a exploração das tarefas integrando o GeoGebra, mediante o trabalho colaborativo entre os estudantes no laboratório de informática, descentralizando-se do ambiente de aulas expositivas, se revelou numa experiência com potencialidades importantes, tanto ao nível dessas aprendizagens, como também do desenvolvimento das capacidades de argumentação, explicação e justificação dos estudantes.

Através da troca de ideias entre os componentes de cada par (trio em alguns casos), surgiram diversas abordagens que conduziram não só à aprendizagem das ideias matemáticas como também à melhoria na formulação de justificativas, para resolução das tarefas e apresentação de soluções diante da turma. Acrescenta-se ainda que os momentos de discussão coletiva se revelam fundamentais também para aprofundar o conhecimento dos processos matemáticos trabalhados na resolução das tarefas. É possível confirmar essa conclusão na transcrição da apresentação das respostas às $(Q_7$ e $Q_8)T_3$ feita pelo estudante Gabriel no momento da discussão coletiva dessa tarefa.

Gabriel: Não.

Professor: Então eu te pergunto: Essa justificativa aqui [porque o ponto $y = 4$ está aberto] está correta?

Gabriel: No final da tarefa anterior, vimos que existe uma expressão geral que permitia calcular a declividade da reta tangente, ao gráfico de $f(x)$. Essa expressão é $m_T = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Na questão 2 nós descobrimos $V = 4x^3 - 10x^2 + 100x$. Então nós pegamos [...]. Então temos que $m_T = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 12x^2 - 8x + 100$.

Gabriel: Como a declividade é zero [...].

Professor: Por que a declividade é zero? Isso eu gostaria que você explicasse.

Gabriel: Porque a reta tangente é paralela ao eixo x, logo a declividade é zero. Aí a gente iguala a expressão de m_t a zero, [...] obtendo as soluções $x_1 = 1{,}6666 \ldots = \frac{5}{3}$ e $x_2 = 5$.

Professor: E agora gente! As duas [soluções] são soluções? Apenas uma e qual delas?

Karina: Não. Quando a gente achou $x = 5$ eu fiquei tentando entender o porquê desse 5! Esse $x = 5$ me lembrou o $x = 5$ da questão 1, mas não sei se é o mesmo.

Professor: O valor que você achou, $x = 5$, significa o que no problema? Esse valor de x representa o que na construção da caixa?

Gabriel: O valor do corte.

Professor: Pergunto: Aquela solução, $x = 5$, é solução do nosso problema?

Estudantes: Não!

Gabriel: Esse $x = \frac{5}{3}$ é o valor do corte para que a caixa tenha volume máximo.

Há evidências de que esse tipo de estratégia didática tenha contribuído para as aprendizagens dos estudantes sobre os conteúdos matemáticos estudados, e para a criação de estratégias de resolução dos exercícios e problemas em sala de aula, conforme salientada pelos próprios estudantes ao responder o questionário (Figura 6.4).

$\boldsymbol{Q_2}$: Em sua opinião, de que forma o trabalho realizado em sala de aula, marcado pela integração de tarefas exploratórias e o GeoGebra, contribuiu para a sua compreensão dos conceitos estudados?
“Os recursos utilizados tornaram as aulas mais dinâmicas, interativas e possibilitaram uma melhor visualização e compreensão dos conceitos explorados em sala de aula”
“Foi ótimo! Fiquei muito contente com o resultado pois consegui entender na prática o conceito de limite. Sugiro que as aulas fossem mais didáticas de forma a compreendermos o conteúdo e não somente decorar para a prova”
“Contribuiu na forma de entender o $\lim_{x\to x_0} f(x)$ quando ele se aproxima à direita e à esquerda, e permitiu compreender e conseguir analisar melhor, facilitando os exercícios postos em sala de aula”

Figura 6.4 – Extrato de respostas dos estudantes à questão Q_2 do Questionário Final

Por fim, o terceiro objetivo, sobre as questões da investigação, julgo que as reformulações realizadas após a análise do estudo exploratório, proporcionaram questões mais refinadas e que permitiram alcançar os objetivos da investigação. As questões que antecederam o estudo exploratório estavam muito gerais e focadas na aprendizagem dos conceitos, ao invés de orientadas para a compreensão nesta aprendizagem. Todavia, as novas questões já são fruto de ajustamentos e refinamentos oriundos da identificação de aspetos importantes a partir dessa análise preliminar confrontadas com revisão da literatura. Saliento que essas reformulações são previstas e pertinentes numa pesquisa qualitativa na modalidade de experiência de ensino, como já foi referido anteriormente.

Desta forma, os resultados sugerem que o estudo exploratório veio a contribuir para o planeamento da presente experiência de ensino, em particular em relação ao ambiente de ensino na sala de aula e às tarefas exploratórias com recurso ao GeoGebra que serão propostas aos estudantes.

6.3. Planeamento da experiência de ensino

As aulas da disciplina de Pré-Cálculo, que suporta a experiência de ensino, estavam previstas para ocorrerem em dois encontros semanais, nomeadamente, 4 aulas (quinta-feira) e 2 aulas (sexta-feira). Entretanto, identifiquei na grade de horários dos estudantes, na sexta-feira, a inexistência de aulas de outras disciplinas após as aulas de Pré-Cálculo, pelo que perguntei aos estudantes se seria possível estender de 2 para 3 o número de aulas na sexta-feira e reduzir de 4 para 3 as aulas da quarta-feira, a fim de manter a igualdade de aulas nos encontros. Todos concordaram e por isso a prática em sala de aula da experiência de ensino ocorreram em 3 aulas (45 min cada) nas quintas-feiras e sextas-feiras. Saliento, no entanto, que por conta do alto número de feriados foi necessário ajustar o plano de aulas e realizar a reposição de nove aulas, sendo esta reposição realizada em três segundas-feiras, a saber: duas delas serão destinadas às aulas de aplicações de tarefas e a outra para aulas de resoluções de exercícios e problemas, todas no estudo do conceito de limite (conforme anexo 7).

A experiência de ensino será focada nos conceitos de limite e continuidade, dada a sua importância para o Cálculo e para o *conhecimento matemático* do futuro professor de matemática (Albuquerque et al., 2006; SBEM, 2013) e foi planeada tendo em conta a planificação da disciplina de Pré-Cálculo do curso de Licenciatura em Matemática do IFRJ/Campus Nilópolis (anexo 7). Os participantes foram os estudantes que estavam a realizar a disciplina de Pré-Cálculo do 1.º semestre letivo do ano de 2016, do referido curso, e, portanto, futuros professores de Matemática.

O planeamento da experiência de ensino contempla apenas os tópicos de limite e continuidade e compreende um total de 66 aulas de 45 minutos cada, em 11 semanas letivas consecutivas (da 8ª à 19ª semana do anexo 7). A experiência envolve a aplicação de 17 tarefas exploratórias integrando o GeoGebra e duas tarefas de avaliação. A resolução das 17 tarefas exploratórias preveem o uso do computador com a instalação do *software* GeoGebra 5.0 e foram distribuídas em quatro sequências de tarefas, sendo as três primeiras destinadas a promover a aprendizagem com compreensão do conceito de limite e a última para a continuidade de funções, com um número diferente de tarefas, dado a extensão também diferente das unidades referentes a estes tópicos. A planificação dessas sequências de tarefas, juntamente com as estratégias de aprendizagem utilizadas, encontra-se descrita na secção 6.4. A dinâmica de sua aplicação em sala de aula, segue uma abordagem exploratória.

Após finalizado o trabalho na 3ª e na 4ª sequência de tarefas, foram aplicadas pelo professor-pesquisador as duas tarefas de avaliação (A_1 e A_2, respetivamente), respondidas individualmente pelos estudantes e sem o uso do GeoGebra, a fim de confirmar se os estudantes alcançaram ou não as aprendizagens sobre o conceito de limite (A_1e A_2) e continuidade de funções (A_2). Essas tarefas também foram usadas como instrumentos de avaliação sumativa (Santos, 2002) para a classificação final dos estudantes na disciplina de Pré-Cálculo. A seguir apresento a planificação das sequências de tarefas.

6.4. Planificação das sequências de tarefas e estratégias utilizadas

6.4.1. Características gerais das tarefas

As tarefas são elementos organizadores da atividade do estudante no processo de aprendizagem. Elas fornecem os contextos intelectuais para o desenvolvimento matemático dos estudantes e são importantes tanto para introduzir quanto para consolidar a aprendizagem dos conteúdos matemáticos (Ponte, 2005). Quando adequadas, as tarefas podem levar o estudante a um envolvimento maior com o que é ensinado, além de desafiá-los intelectualmente (NCTM, 2000).

As designações de tarefas matemáticas encontradas com maior frequência na literatura são os exercícios, problemas, tarefas de exploração (ou exploratórias) e tarefas de investigação (Abrantes, 1989; Ponte, 2005; 2014). Os exercícios são tarefas de dificuldade reduzida, em que os estudantes são chamados a aplicar um método de resolução já conhecido, e que se resolve habitualmente em poucos minutos (Ponte, 2014). Os problemas são tarefas que requerem um esforço especial de interpretação e simulação de diferentes possibilidades de resolução e não apenas aplicar uma fórmula ou processos rotineiros (Abrantes, 1989). As tarefas exploratórias por sua vez são tarefas nas quais os estudantes são conduzidos a (re)construir estratégias de resolução a partir dos seus conhecimentos prévios, visando a descoberta do que não é apresentado de forma explicita no seu enunciado (Ponte, 2005). Por fim, as tarefas de investigação são tarefas com elevado nível de desafio, que partem de uma situação desafiadora, possibilitando o uso de diferentes estratégias de resolução e com diferentes níveis de sofisticação matemática, visando uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos que se ligam com o conhecimento prévio dos estudantes (Ponte, 2014).

Em termos de estrutura, as tarefas matemáticas são classificadas em "fechadas" e "abertas" (Ponte, 2005). As tarefas fechadas apresentam de forma explicita no seu enunciado o que é dado e o que é pedido. São exemplos de tarefas fechadas os exercícios e os problemas. Por outro lado, nas tarefas abertas, pelo menos um dos seus aspetos ("o que é dado" ou "o que é pedido") não é apresentado no enunciado de forma explícita, sendo descoberto no decorrer de sua resolução. Como exemplo tem-se as tarefas de investigação e as tarefas exploratórias. Segundo Ponte (2005) as tarefas de cunho mais *fechado* são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos estudantes, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados. Já as tarefas de natureza mais *aberta* são essenciais para o desenvolvimento nos estudantes da capacidade de argumentação, de justificação, de autonomia na resolução das questões, etc.

Para que a aprendizagem e compreensão dos conceitos matemáticos se desenvolva de uma forma ampla e sólida, as tarefas devem envolver os estudantes com o propósito de criar compreensão e não apenas com o objetivo de verificar aprendizagem (Domingos, 2001; Pólya, 1945). Nesse sentido, a literatura tem salientado que tarefas exploratórias cumprem este papel pois são tarefas desafiantes, de cunho aberto (Ponte, 2005), focadas no pensamento e raciocínio dos estudantes, dando-lhes oportunidade de descobrir autonomamente a resposta ao desafio, de representar conceitos matemáticos, de formular conjeturas e de as discutir, apresentando justificações matemáticas adequadas ao seu nível etário, favorecendo a reflexão e discussão de significados, buscando a consolidação da aprendizagem (Canavarro, 2011; Ponte, 2014). Ademais, Ponte (2005) recomenda o uso de sequências de tarefas, integradas entre si, em detrimento de tarefas isoladas, como forma de proporcionar um percurso de aprendizagem que permita aos alunos a construção dos conceitos, a compreensão dos procedimentos, o conhecimento das formas de representação relevantes e das conexões de cada conceito dentro da Matemática e com outros domínios.

Relativamente à aprendizagem e compreensão conceitual do conceito de limite e continuidade, Messias e Brandemberg (2015) indicam que o trabalho com as tarefas exploratórias possibilita ao estudante o desenvolvimento de significados corretos do limite e a continuidade de uma função, a correlação da (des)continuidade de uma função num ponto associado à (não) existência do limite nesse ponto, e a mobilização/coordenação de registos de diferentes representações destes conceitos (verbal, algébrica, tabular e geométrica). Alves (2010), por sua vez, revela que as tarefas exploratórias constituem um mecanismo de ensino que favorece o resgate e a aprendizagem de conteúdos matemáticos relativo às funções e à álgebra, além de promover o uso de diversas representações de funções que é a base do estudo sobre os conceitos de limite e continuidade. Mira-López (2016) indica que este tipo de tarefa é importante para o desenvolvimento da compreensão do conceito de limite de uma função, permitindo ao professor, por exemplo, descrever como os estudantes constroem sua conceção do limite no ponto, iniciando com as noções de aproximações e desenvolvendo-se até uma conceção formal, por meio da definição formal de limite. Este autor aponta que este tipo de tarefa permite explorar os significados sobre o limite e que estão presentes no *conceito-imagem* dos estudantes, revelando-se um recurso com potencialidade para a compreensão deste conceito.

Neste estudo, opto por usar os diferentes tipos de tarefas para a construção de quatro sequências de tarefas. Essa escolha é favorável ao desenvolvimento do raciocínio dos alunos (os problemas), a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas (exploratórias/investigação) e para que tenham uma efetiva experiência matemática (modelação), contribuindo assim para promover meios dos alunos alcançarem aprendizagens com compreensão dos conceitos de limite e continuidade (Ponte, 2005; Skemp, 1976). Elaborei 17 tarefas de natureza exploratórias e 2 tarefas de avaliação atendendo os objetivos de aprendizagem dos conceitos e a minha experiência como professor da disciplina de Pré-Cálculo.

As tarefas exploratórias foram construídas tendo como recurso explorações em *applets* do GeoGebra, não sendo possível separá-los. As *applets* foram desenvolvidas para incentivar a descoberta, experimentação e visualização, aspetos considerados importantes para a compreensão dos conceitos de limite e continuidade de funções (Arzarello & Manzone, 2017; Dikovic, 2009; Slavícková, 2013). Elas foram desenhadas e criadas por mim, tendo eu recebido colaboração do professor André Silva do LAC/IFRJ na programação e ajustes de algumas animações 2D e 3D. O acesso às *applets* pode ser feito em https://www.geogebra.org/m/qr5gynxq.

Cada uma das tarefas exploratórias permite o desenvolvimento, simultâneo, de aspetos que se relacionam com as componentes da compreensão, nomeadamente, de noções intuitivas, algébricas e formais desses conceitos, apoiadas em explorações dinâmicas no GeoGebra que continham o registo de diferentes representações desses conceitos, a fim de desenvolver o *conceito-imagem* dos estudantes, permitir-lhes construírem significados corretos desses conceitos e reconhecer e realizar conexões entre suas diferentes representações. Quanto às tarefas de avaliação, incluíam variados problemas que, para resolvê-los, era requerido conhecimentos das noções intuitivas, cálculo algébrico e definição formal associados aos conceitos de limite e continuidade, seus diferentes significados, representações, propriedades e teoremas. As caraterísticas dessas tarefas tornam-se essenciais à promoção da compreensão relacional dos conceitos matemáticos (Skemp, 1976).

Essas tarefas também contêm situações que requerem dos estudantes a formulação de conjeturas, generalizações e argumentação de ideias, a fim de encaminhá-los à dedução de regras ou propriedades sobre os conceitos matemáticos, exigindo que sejam mobilizados conhecimentos adquiridos para resolver problemas de modelação ou validação/refutação de proposições matemáticas. Salienta-se ainda em algumas tarefas, questões que foram construídas com vista a proporcionar a articulação entre conteúdo e pedagogia, propondo experiências de análise em resoluções de alunos, onde a identificação, refutação e justificação de erros eram requeridos. Nessas experiências, o conhecimento matemático é importante para a identificação dos erros nas respostas dos alunos, enquanto a sua refutação e correção justificada é viabilizada pela mobilização de conhecimento pedagógico da Matemática para ensinar (Ball et al., 2008). Desta forma, as sequências de tarefas permitem aos estudantes mobilizarem conhecimentos que vão adquirindo para uma melhor compreensão, favorecendo assim promoção do *conhecimento matemático* de um futuro professor (Ponte & Chapman, 2008). A seguir apresento a planificação das sequências de tarefas utilizadas.

6.4.2. As sequências de tarefas

Como referido anteriormente, a experiência de ensino foi organizada em quatro sequências de tarefas, planeadas para trabalhar os tópicos de limite e continuidade de funções da unidade curricular de Pré-Cálculo. Cada sequência de tarefas foi pensada e estruturada de forma a que contemplasse o desenvolvimento das *noções intuitivas*, do *cálculo algébrico* e da *definição formal* dos conceitos, onde a atribuição de significados relacionados ao limite, o uso das suas diferentes representações e a resolução de problemas que o envolve são explorados de forma transversal ao longo das sequências.

Também construí algumas *applets* no GeoGebra para serem exploradas de forma a apoiarem as questões das tarefas. As explorações nas *applets* visavam conduzir os estudantes à experimentação, visualização e descoberta de aspetos relacionados ao limite e continuidade de funções, nomeadamente, propriedades, significados, representações, entre outros. A seguir apresento uma descrição de cada uma das quatro sequências de tarefas, explicitando os seus principais objetivos e ações requeridas dos estudantes ao explorarem as *applets* do GeoGebra. Os enunciados das tarefas encontram-se apresentados no anexo 10.

Sequência I – A aprendizagem do limite de uma função num ponto.

A primeira sequência de tarefas compreende as tarefas T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_{12} e T_{14} (parte 2) e visa promover a aprendizagem do limite de uma função num ponto. Na tabela 6.4 é apresentada a sistematização dos principais objetivos das tarefas desenvolvidas nesta sequência e as respetivas ações realizadas no GeoGebra, visando promover a aprendizagem do limite no ponto.

Antes da aplicação da T_1, professor-pesquisador deve propor aos estudantes o seguinte desafio: "Dada uma função real f estamos interessados em saber o que acontece com os valores das imagens $f(x)$ quando x se aproxima de um ponto x_0". Ele deve tomar como exemplo a função $f(x) = 2x - 1$ e o ponto $x_0 = 2$, analisar com os estudantes o comportamento das imagens de $f(x)$, recorrendo ao preenchimento de uma tabela com duas colunas com os valores de $x \to 2$ e $f(x) = 2x - 1$, de modo a conduzir os estudantes à compreensão de que as imagens $f(x)$ se aproximam de 3. O professor conclui que $f(x)$ converge para 3 e denomina de limite de $f(x)$ no ponto $x = 2$ o resultado dessa convergência, indicando-o algebricamente por $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$.

Após esse momento, os estudantes resolvem a tarefa T_1 cujo objetivo é explorar as noções intuitivas de aproximação simultânea $x \to x_0$ e $f(x) \to L$ encaminhando os estudantes à dedução das condições de sua existência. Para resolvê-la os estudantes recorrem à análise dos gráficos de quatro funções f_k $(k = 1, \dots, 4)$ apresentadas em *applets* do GeoGebra, onde arrastam o seletor x até x_0 (para $x < x_0$ e $x > x_0$) e observam o comportamento dos pontos $(x, f(x))$ nos gráficos das funções ou numa tabela em que são apresentados os valores de suas coordenadas e concluem sobre a (in)existência do $\lim_{x \to 2} f_k(x)$. As questões da tarefa, apoiadas nas explorações das *applets* do GeoGebra, que requerem a experimentação de registos geométricos do limite no ponto e a formulação de conjectura associada à implicação $x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to L$, buscam conduzir os estudantes ao significado das aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to L$, de forma a permitir-lhes reconhecerem as condições de existência do limite. Posteriormente, na discussão coletiva, o professor deve conduzir os estudantes à consolidação das condições de existência do $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$ e ao método algébrico do cálculo do limite (L).

Na tarefa T_2, que se propõe consolidar as condições de existência de limite no ponto, os estudantes devem aplicar seus conhecimentos iniciais sobre o *limite no ponto*, para explicar a simbologia $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ e resolver um problema de análise de erros, que requer a identificação, correção e justificação de erro cometido por um aluno, ao considerar que o limite no ponto só existe se for igual ao valor de sua imagem pela função $\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\right)$. Posteriormente, na discussão coletiva, o professor-pesquisador conduz os estudantes à consolidação da condição de existência do limite (L), a partir da notação de limite laterais, nomeadamente, $L = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

Tabela 6.4 – Sistematização das tarefas da sequência I

Data	Tarefa	Objetivos das tarefas	Ações dos estudantes na exploração do GeoGebra
29/04	$\boldsymbol{T_1}$	• Reconhecer o limite no ponto (L) representado geometricamente • Deduzir a condição de existência do limite no ponto	• Exploração de aproximações simultâneas $x \to x_0$ e $f(x) \to L$ • Visualização dinâmica do comportamento das imagens $f(x)$ em gráficos de funções
02/05	$\boldsymbol{T_2}$	• Reconhecer o limite no ponto representado por sua notação algébrica e como resultado do cálculo algébrico • Calcular o valor do limite de funções definidas por combinação de várias expressões analíticas	----- não contemplado -----
05/05	$\boldsymbol{T_3}$	• Reconhecer o caso $\frac{0}{0}$ de indeterminação de limite • Deduzir o método de resolução da indeterminação $\frac{0}{0}$ de limite de funções racionais • Reconhecer que o limite o ponto (L) é alcançado (atingido) pela função f	• Exploração de aproximações simultâneas $x \to x_0\ e\ f(x) \to L$ • visualização dinâmica de representação geométrica do limite no ponto
06/05	$\boldsymbol{T_4}$	• Reconhecer relação implicativa entre vizinhanças $x \in V_\delta(x_0)$ e $f(x) \in V_\varepsilon(L)$ • Reconhecer o limite no ponto representado geometricamente, cujos registos assentam-se na sua definição formal • Representar o limite algebricamente com base nas noções de vizinhanças.	• Exploração de aproximações simultâneas $x \to x_0\ e\ f(x) \to L$ • Exploração das vizinhanças $x \in V_\delta(x_0)\ e\ f(x) \in V_\varepsilon(L)$
12/05	$\boldsymbol{T_5}$	• Reconhecer o limite quando representado por sua definição formal • Reconhecer o limite representado geometricamente, cujos registos assentam-se na sua definição formal • Reconhecer que o limite é alcançado (atingido) pela função f	• Visualização dinâmica da representação geométrica do limite no ponto, cujos registos assentam-se na sua definição formal
03/06	$\boldsymbol{T_{12}}$	• Deduzir a expressão algébrica do declive da reta tangente ao gráfico de funções por $m_T = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ • Aplicar m_T na resolução de problema que o envolve • Reconhecer que o limite (m_T) é alcançado pela aproximação das r_S	• Simulação de aproximações de retas secantes (r_S) a reta tangente reta tangente (r_T) ao gráfico de função • Visualização dos registos numérico e geométrico dos declives de (r_S) e (r_T)
17/06	$\boldsymbol{T_{14}}$ **Parte 2**	• Reconhecer que o declive da reta tangente ao gráfico de função no seu ponto máximo é dado por $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$ • Aplicar conhecimentos da taxa de variação instantânea para resolver problemas de otimização	• Exploração dinâmica do registo geométrico da r_T ao gráfico de uma função. • Visualização dinâmica do formato e planificação de paralelepípedo

A tarefa T_3, cujo objetivo é introduzir a noção de forma indeterminada $\frac{0}{0}$ no cálculo algébrico de limite, os estudantes devem resolver as questões tendo que recorrer à exploração dinâmica da representação geométrica de um limite no ponto, apresentada numa *applet* do GeoGebra. Eles devem realizar simulações de pontos $\left(x, f(x)\right)$, a partir do arrastamento de seletores x e do objeto $P\left(x, f(x)\right)$, e que permitem a visualização dinâmica do comportamento das imagens $f(x)$. A resolução das questões, com recurso à *applet* do GeoGebra, busca explorar os registos algébrico e geométrico do limite, o significado da implicação $x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to L$, e visa conduzir os estudantes ao reconhecimento do resultado algébrico $\frac{0}{0}$ no cálculo algébrico de limite no ponto como uma indeterminação do limite e a dedução do procedimento de sua resolução, e também que o limite L é alcançado (atingido) pela função f.

As tarefas T_4 e T_5 visam desenvolver as noções formais do limite no ponto como resultado da implicação baseada na noção de vizinhanças ($x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$), fundamentais à compreensão da definição formal do conceito de limite (Cottrill et al., 1996; Swinyard & Larsen, 2012). Para resolver essas tarefas, os estudantes devem recorrer à exploração de duas *applets* do GeoGebra (uma em cada tarefa), que continham, cada uma, a representação geométrica de um limite no ponto, cujos registos assentam nas simbologias contidas na definição formal. Em cada *applet*, eles deverão realizar simulações de pontos $\left(x, f(x)\right)$ com $x \in V_\delta(x_0)$ e $f(x) \in V_\varepsilon(L)$, e do número real ε que gerava modificações nos raios (δ e ε) e nas vizinhanças $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ e $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$ com vista a responder as questões de cada tarefa.

A tarefa T_4 busca desenvolver nos estudantes conhecimento sobre a existência de relação entre os quantificadores $\forall\, \varepsilon > 0$ e $\exists\, \delta > 0$, e a correspondência implicativa entre as vizinhanças $V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$ ($x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$), a fim de conseguirem representar o limite por uma expressão algébrica com base nas noções de vizinhança. Os significados dessas noções formais de limite no ponto, deverão ser consolidadas pelo professor-pesquisador, no momento da discussão coletiva com os estudantes, sendo a definição formal de limite enunciada por ele como sistematização das aprendizagens dessa tarefa. Já a tarefa T_5, busca consolidar o significado das aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to L$ em termos das noções de vizinhanças $x \in V_\delta(x_0)$ e $f(x) \in V_\varepsilon(L)$. Os estudantes serão conduzidos pelas questões a aplicar os seus conhecimentos sobre as noções formais do limite, adquiridos na tarefa anterior, para interpretar o limite quando representado algebricamente por sua definição formal ou geometricamente – numa *applet* do GeoGebra – contendo registos assentes na simbologia contida nesta definição. Com base nessa perspetiva formal do limite eles devem recorrer à exploração dinâmica da *applet* e decidir se o limite representado geometricamente é alcançado pela função.

Finalmente, as tarefas T_{12} e T_{14} têm como objetivo desenvolver conhecimentos sobre a noção de *taxa de variação instantânea* de uma função como aplicação do conceito de limite. A *taxa de variação instantânea* é fundamental na aprendizagem do Cálculo uma vez que configura-se numa aplicação direta do conceito de limite e constitui-se na definição do conceito de derivada, cuja interpretação geométrica corresponde ao declive da reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $(x_0, f(x_0))$ (Artigue, 1991; Biza & Zachariades, 2010; Orts et al., 2016).

Na tarefa T_{12}, os estudantes devem realizar, numa *applet* do GeoGebra, simulações geométricas da reta tangente (r_T) ao gráfico de uma função f num ponto $x = x_0$, obtida pela aproximação de retas secantes (r_S), e que permite a visualização dinâmica do comportamento das retas secantes coincidindo com a reta tangente, na passagem ao limite $(h \rightarrow 0)$. A resolução das questões da tarefa, com recurso a *applets* do GeoGebra, busca conduzir os estudantes por meio de processos de raciocínios (experimentação, generalização e descoberta) à dedução que o declive da referida reta tangente (m_T) é expresso algebricamente por $m_T = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. A partir dessa descoberta, eles devem aplicar os conhecimentos adquiridos para determinar o declive de r_T ao gráfico de uma função e reconhecer que o limite (declive de r_T) é alcançado pela aproximação convergente de r_S. No momento da sistematização das aprendizagens com os estudantes, o professor deve esclarecer que a expressão $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ descreve *taxa de variação instantânea* de uma função e explicar sua importância ao estudo de funções.

Já na tarefa T_{14}, os estudantes devem realizar explorações dinâmicas do registo geométrico da reta tangente num ponto $P = (x, V(x))$, no gráfico de uma função real (V) que modela o volume de uma caixa num formato de paralelepípedo, apresentado numa *applet* do GeoGebra. Ao resolverem as questões da tarefa, que requerem a experimentação, testes e generalização de registos algébricos, tendo que recorrer à exploração na *applet*, os estudantes devem aplicar os seus conhecimentos sobre a taxa de variação instantânea associada ao conceito de limite, para traduzir o declive da reta tangente ao gráfico de uma função no seu ponto máximo, pela equação $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$ e resolver um problema de otimização, que consiste em determinar o valor de x que maximiza o volume da caixa e as dimensões da caixa.

Assim, o conjunto das três primeiras tarefas procura estabelecer as bases das noções intuitivas e do cálculo algébrico do limite no ponto, as tarefas T_4 e T_5, juntas, visam desenvolver as noções formais do limite com base nas simbologias de sua definição formal, e as duas últimas tarefas conduzem ao desenvolvimento da noção de taxa de variação instantânea de uma função, constituindo, desta forma, um percurso de aprendizagem do limite no ponto.

Sequência II – A aprendizagem do limite infinito

A segunda sequência de tarefas foi pensada para desenvolver conhecimentos das *noções intuitivas*, *cálculo algébrico* e *definição formal* associados ao limite infinito e compreende as tarefas T_6, T_7, e T_8. Na tabela 6.5 está apresentada a sistematização dos principais objetivos das tarefas desenvolvidas nesta sequência e as respetivas ações a realizar no GeoGebra, visando promover a aprendizagem do limite infinito.

A tarefa T_6, propõe introduzir a noção de limite infinito e sua implicação geométrica chamada de assíntota vertical. Os estudantes devem realizar explorações em gráficos de funções f_k ($k = 1, 2$ e 3) representados em *applets* do GeoGebra, para decidir sobre a existência dos limites laterais $\lim_{x \to {x_0}^+} f_k(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f_k(x)$. As explorações nas *applets* pretendem levá-los a observar que, em alguns casos, a função assume valores muito grandes positivos ($f(x) \to \infty$) ou negativos ($f(x) \to -\infty$), quando $x \to x_0^+$ e/ou $x \to x_0^-$. Neste casos, a 'reta vertical imaginária' de equação $x = x_0$ determina um 'limite' ou 'barreira' ao gráfico de f, correspondendo assim à reta cujo gráfico da função dela se aproxima à medida que os valores de x do domínio de f converge para x_0, sendo denominada de assíntota vertical ao gráfico da função. As questões da tarefa, suportadas pelas explorações das *applets* buscam explorar os registos algébrico e geométrico do limite infinito e o significado da implicação $x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to \pm\infty$ e conduzir os estudantes a experimentações de registos geométricos do limite infinito, de forma que consigam deduzir as condições de existência da assíntota vertical ao gráfico de uma função em $x = x_0$, expressando-as algebricamente por $\lim_{x \to {x_0}^+} f(x) = \pm\infty$ ou

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$. Na discussão coletiva dessa tarefa, o professor deve conduzir os estudantes à consolidação das condições de existência da assíntota vertical ao gráfico de uma função e as possíveis representações geométricas do comportamento assintótico vertical da função; e esclarecer que um resultado infinito no cálculo do limite constitui o método de determinar possíveis candidatos a assíntota vertical ao gráfico de uma função, justificando com exemplos.

Na tarefa T_7, cujo objetivo é promover conhecimento sobre procedimento algébrico de determinação de uma assíntota vertical, os estudantes são conduzidos pelas questões à exploração de uma *applet* do GeoGebra que contém o gráfico de uma função racional f, onde realizam simulações dinâmicas das aproximações $x \to x_0^+$ e $x \to x_0^-$ com implicação $f(x) \to \infty$ ou $f(x) \to -\infty$, a fim de visualizar o comportamento das imagens $f(x)$ numa vizinhança de $x = x_0$ e decidir sobre o $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Simultaneamente, devem realizar o cálculo algébrico do limite no ponto a fim de encontrar o seu valor, sendo fornecida, pela tarefa, a expressão algébrica que define a função f, e ainda, realizar comparações entre ambos os resultados. Essas comparações visam desenvolver nos estudantes o conhecimento que lhes possibilite experimentações e a descoberta de que o resultado infinito no cálculo algébrico do limite constitui o método de determinar possíveis candidatos a assíntota vertical ao gráfico de uma função, e que a simbologia $\frac{k}{0}$ como resultado do cálculo algébrico do $\lim_{x \to x_0} f(x)$ resulta no limite infinito, cuja característica geométrica corresponde à assíntota vertical ao gráfico de f, no ponto $x = x_0$. Com base nessas experimentações, os estudantes devem representar geometricamente os possíveis registos de assíntota vertical ao gráfico de uma função racional. No momento da discussão coletiva, o professor deve esclarecer que o resultado algébrico $\frac{k}{0}$, $(k \in \mathbb{R} - \{0\})$ no cálculo de limite no ponto não representa um número real ou mesmo uma indeterminação, mas descreve o comportamento infinito da função f quando $x \to x_0$, revelando a existência da assíntota vertical ao gráfico dessa função no ponto $x = x_0$.

A tarefa T_8 tem como objetivo promover o desenvolvimento das noções formais do *limite infinito* com base na sua definição formal. É requerido aos estudantes a aplicação de conhecimentos de limite infinito e das noções formais do limite no ponto para: (i) analisar representação geométrica do $\lim_{x \to x_0} f(x)$ que resulta num limite infinito e decidir qual a expressão algébrica assente na noção de vizinhança que o define; e (ii) analisar proposições algébricas que visavam definir formalmente o $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e associá-las ao limite no ponto ou ao limite infinito ou mesmo a nenhum dos dois.

Tabela 6.5 – Sistematização das tarefas da sequência II

Data	**Tarefa**	**Objetivos das tarefas**	**Ações dos estudantes na exploração do GeoGebra**
13/05	$\boldsymbol{T_6}$	• Reconhecer o comportamento infinito das imagens $f(x)$ de uma função caracterizando-o por limite infinito • Associar o limite infinito à existência de assíntota vertical ao gráfico da função • Deduzir as condições de existência da assíntota vertical ao gráfico de uma função em x_0, expressando-as algebricamente por $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$	• Exploração de aproximações $x \to x_0^+$ e $x \to x_0^-$, com implicação $f(x) \to L$, $f(x) \to \infty$ ou $f(x) \to -\infty$ • Visualização dinâmica do comportamento infinito das imagens $f(x)$ em gráficos de funções • Visualização da assíntota vertical ao gráfico de função em $x = x_0$
19/05	$\boldsymbol{T_7}$	• Reconhecer o limite infinito representado geometricamente • Associar o resultado algébrico $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{k}{0}$ à existência de assíntota vertical ao gráfico de funções racionais • Representar geometricamente os possíveis registos de assíntota vertical ao gráfico de uma função racional	• Exploração dinâmica das aproximações $x \to x_0^+$ e $x \to x_0^-$, com implicação $f(x) \to \infty$ ou $f(x) \to -\infty$ • Visualização dinâmica do comportamento infinito das imagens $f(x)$ em gráfico de função • Visualização da assíntota vertical ao gráfico de função em $x = x_0$
19/05	$\boldsymbol{T_8}$	• Reconhecer o limite infinito representado geometricamente, cujos registos assentam-se na sua definição formal. • Analisar proposições algébricas que visavam definir formalmente o $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e associá-las ao *limite no ponto* ou ao *limite infinito* ou mesmo a nenhum dos dois.	----- não contemplado ----

A conexão entre os conhecimentos de limite infinito e da definição formal de limite no ponto, particularmente, o papel dos quantificadores e da sua ordem, e significados de $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$, visa desenvolver, nos estudantes, conceitos imagem que lhes possibilitem reconhecer as relações '$\forall A > 0$ tem-se $f(x) > A$' e '$\forall A < 0$ tem-se $f(x) < A$' como descrição algébrica dos comportamentos infinitos das imagens $f(x)$, respectivamente, $f(x) \to \infty$ e $f(x) \to -\infty$. e os ajudem a desenvolver noções formais do limite infinito que resultem em conceção correta do limite infinito.

Sequência III – A aprendizagem do limite no infinito

A terceira sequência de tarefas foi construída com o objetivo de desenvolver conhecimento das noções intuitivas, cálculo algébrico e definição formal associados ao limite no infinito e compreende as tarefas T_9, T_{10}, e T_{11}. A tabela 6.6 apresenta sistematização dos principais objetivos de suas tarefas e as respetivas ações de exploração no GeoGebra, visando promover a aprendizagem do limite no infinito.

A tarefa T_9 foi construída para desenvolver as noções intuitivas do limite no infinito e de sua característica geométrica denominada assíntota horizontal ao gráfico da função, verificada quando o resultado desse limite é um número real L. Para isso, os estudantes são direcionados, pelas questões, a realizarem explorações em *applets* do GeoGebra que contém gráficos de funções f_k $(k = 1, 2 \text{ e } 3)$, tendo que realizar experimentações em seus registos algébricos e geométricos associados ao *limite no infinito* e desenvolver o significado da implicação $x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to L$, a fim de analisar o que acontece com as imagens $f(x)$ quando x cresce infinitamente em valores positivos $(x \to \infty)$ e decresce infinitamente em valores negativos $(x \to -\infty)$. Essas explorações nas *applets* visam levá-los a observar que, em alguns casos, a função se aproxima e segue a direção de uma reta horizontal 'imaginária', de equação $y - L = 0$, ou equivalente, denominada assíntota horizontal ao gráfico da função. A partir dessas descobertas, os estudantes devem deduzir as condições de existência da assíntota horizontal ao gráfico de uma função e expressá-las algebricamente por $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ e geometricamente. Na discussão coletiva, o professor deve consolidar com os estudantes a noção de limite no infinito e as condições de existência da assíntota horizontal ao gráfico de uma função com base nessa noção, e formalizar as possíveis representações geométricas do comportamento assintótico horizontal da função.

A tarefa T_{10}, tinha como objetivo principal desenvolver procedimentos do cálculo algébrico do limite no infinito, sendo dividida em duas partes. Na parte 1 desta tarefa, composta por três questões, os estudantes exploram uma *applet* do GeoGebra que contém gráficos de famílias de funções potências $f_n(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$, separadas em duas telas. A tela da esquerda apresenta as funções $f_n(x) = x^n$, para n par, enquanto a tela da direita as funções $f(x) = x^n$ quando n é ímpar. A resolução das questões da tarefa, com recurso a *applet* do GeoGebra, busca conduzir os estudantes as experimentações, testes e generalizações em registos algébricos e geométricos associados ao limite no infinito de funções potências, a fim de que possam formular conjetura para o resultado do cálculo algébrico de $\lim_{x\to\pm\infty} x^n$, a saber, que $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} x^n = \begin{cases} \infty, & \text{se } n \text{ for par} \\ -\infty, & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$.

A parte 2 da T_{10}, composta por oito questões, foi construída de forma que os estudantes consigam descobrir um procedimento do cálculo algébrico do limite no infinito de funções racionais. Para isso, eles realizam explorações dinâmicas numa *applet* do GeoGebra, que contém gráficos de uma função polinomial $p(x)$ e de uma função potência, constituída pelo monómio de maior grau de $p(x)$, sendo guiados pelas questões da tarefa a realizarem experimentações nos registos algébricos e geométricos associados ao limite no infinito de funções polinomiais, a fim de concluir que o limite no infinito de um polinómio é determinado pelo limite no infinito de seu monómio de maior grau. Ademais, devem usar essa conclusão para conjeturar a técnica do cálculo algébrico do $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$, e ser capaz de prová-la. Posteriormente, no momento discussão coletiva, as noções do cálculo algébrico do limite no infinito são consolidadas pelo professor. Ele deve aproveitar as ideias trabalhadas nessa tarefa para esclarecer que os resultados $\infty - \infty$ e $\pm\frac{\infty}{\infty}$ no cálculo algébrico de $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ constituem casos de indeterminações e, por isso, devem ser usadas alternativas algébricas que permitam resolvê-la.

A tarefa T_{11}, tem como objetivo promover o desenvolvimento das noções formais do *limite no infinito*. Para isso, os estudantes têm que recorrer à exploração de uma *applet* do GeoGebra, que contém a representação geométrica do limite no infinito $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, a qual contém registos assentes na sua definição formal, onde realizaram simulações de vizinhanças $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$, geradas por modificações no parâmetro ε, e de pontos $\big(x, f(x)\big)$ fazendo $x \to \infty$, e correlacionar o comportamento infinito de x à simbologia $x > A$, a fim de compreender a relação entre ε e A, as desigualdades $x > A$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$, e seus papéis na caracterização do limite no infinito. Nesse processo, é requerido aos estudantes a mobilização de seus conhecimentos sobre as noções formais do limite no ponto e limite no infinito, a fim de descrever a expressão algébrica da definição formal do $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. Posteriormente, na discussão coletiva, as noções formais de limite no infinito são consolidadas pelo professor, devendo este, encaminhar com os estudantes a dedução da definição formal dos possíveis casos de limite no infinito: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$.

Tabela 6.6 – Sistematização das tarefas da sequência III

Data	Tarefa	Objetivos das tarefas	Ações dos estudantes na exploração do GeoGebra
20/05	$\boldsymbol{T_9}$	• Reconhecer o comportamento das imagens $f(x)$ de funções quando $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$ caracterizando-o por limite no infinito • Associar o limite no infinito à existência de assíntota horizontal ao gráfico da função • Deduzir as condições de existência da assíntota horizontal ao gráfico de uma função expressando-as algebricamente por $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$	• Exploração de aproximações $x \to \infty$ e $x \to -\infty$ com implicação $f(x) \to L$ em gráfico de funções • Visualização dinâmica do comportamento das imagens $f(x)$ em gráficos de funções • Visualização da assíntota horizontal ao gráfico de uma função
23/05	$\boldsymbol{T_{10}}$	• Reconhecer limite no infinito representado geometricamente • Generalizar resultado de cálculo algébrico do limite no infinito de funções $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ • Deduzir técnica de cálculo algébrico do limite no infinito de funções polinomiais • Deduzir e provar a técnica do cálculo algébrico do limite no infinito de funções racionais	• Exploração dinâmica das aproximações $x \to \infty$ e $x \to -\infty$, com implicação $f(x) \to \infty$ ou $f(x) \to -\infty$ em gráficos de funções polinomiais • Visualização dinâmica do comportamento infinito das imagens $f(x)$ em gráfico de funções polinomiais
02/06	$\boldsymbol{T_{11}}$	• Reconhecer limite no infinito representado geometricamente, cujos registos assentam-se na sua definição formal • Descrever a expressão algébrica da definição formal do $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$	• Simulações dinâmicas da vizinhança $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$ geradas por modificações no parâmetro ε • Simulações dinâmicas de pontos $\big(x, f(x)\big)$ geradas por $x \to \infty$ • Visualização da assíntota horizontal ao gráfico de uma função

Após a aplicação dessas três sequências de tarefas que visam promover a aprendizagem do conceito de limite foi aplicada a primeira tarefa de avaliação (A_1). Esta tarefa contém seis questões que visam avaliar se as aprendizagens do conceito de limite foram alcançadas ou não pelos estudantes (anexo 11). Inclui questões que exploram conhecimentos sobre as noções intuitivas, cálculo algébrico e definição formal do limite de funções reais.

Sequência IV – A aprendizagem da continuidade de uma função

A última sequência de tarefas foi construída visando o desenvolvimento das noções intuitivas, cálculo algébrico e definição formal associado ao conceito de continuidade de funções. A sequência é composta de cinco tarefas, nomeadamente, as tarefas T_{13}, T_{14} (Parte 1), T_{15}, T_{16}, e T_{17}, constituindo, nessa ordem, um percurso didático que pretende promover a aprendizagem do conceito de continuidade no presente estudo. A sistematização dos principais objetivos das tarefas desenvolvidas nesta sequência e as respetivas ações a explorar no GeoGebra, visando promover a aprendizagem do conceito de continuidade está apresentada na tabela 6.7.

A tarefa T_{13} tem como objetivo conduzir os estudantes, autonomamente, à dedução dos critérios de existência da continuidade local de uma função, isto é, que a existência do $\lim_{x \to x_0} f(x)$, $f(x_0)$ e da igualdade $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ devem ser garantidos para que uma função f seja contínua no ponto $x = x_0$. Sua resolução é apoiada por explorações numa *applet* do GeoGebra que contém o gráfico de uma função descontínua $f_k(x)$ em $x = x_0$ (descontinuidade removível), onde os estudantes realizam simulações de pontos $(x, f(x))$ e do gráfico de f_k, tendo que realizar experimentações em seus registos algébricos e geométricos que se relacionam à continuidade local de uma função e desenvolver o significado da implicação $x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to L$, a fim de descobrir possíveis condições de reverter a descontinuidade e formalizá-las por critérios de continuidade local de uma função. A partir dessa descoberta, eles aplicam os conhecimentos adquiridos para analisar o gráfico de cinco funções f_k ($k = 1, 2, \ldots 5$) e decidir sobre a continuidade destas. Esses critérios de continuidade local de uma função são depois consolidados pelo professor na discussão coletiva com os estudantes.

Na tarefa T_{14}, os estudantes são envolvidos no processo de modelação da confecção de uma caixa com formato de paralelepípedo, a partir de uma folha retangular em que são recortados, dos seus cantos, quadrados congruentes de medida x. A parte 1 desta tarefa, composta por sete questões, visa conduzir os estudantes ao reconhecimento da continuidade de uma função. Para isso, eles realizam simulações dinâmicas numa *applet* do GeoGebra, que contém animações da planificação (em 2D) e do formato da caixa (em 3D), e a representação gráfica da função V que modela o seu volume, no intuito de ajudá-los a desenvolver experimentações e generalizações, que lhes possibilitem traduzir algebricamente a função que modela o volume de uma caixa com forma de um paralelepípedo e reconhecer sua continuidade em seu domínio. Na discussão coletiva o professor consolida a ideia da análise da continuidade de uma função.

A tarefa T_{15} tem como objetivo encaminhar os estudantes à dedução da definição formal de continuidade, a partir da definição formal de limite. Para alcançar este objetivo, os estudantes devem interpretar uma expressão algébrica que define formalmente o limite no ponto, explorar os significados das suas simbologias e, ao emergir nela a informação de que "$L = f(x_0)$", deverão concluir que a expressão algébrica representa a definição formal de função contínua em $x = x_0$ e usá-la para provar a continuidade local de uma função. No momento da sistematização das aprendizagens com os estudantes, após a aplicação da tarefa, o professor realiza demonstrações de algumas propriedades de funções contínuas, recorrendo à aplicação da definição formal de continuidade.

As tarefas T_{16} e T_{17} visam promover a aprendizagem do Teorema do Valor Intermédio (TVI). Esse teorema constitui uma boa oportunidade para os estudantes reconhecerem a aplicabilidade do conceito de continuidade de funções (Sealey et al, 2014). Essas tarefas foram construídas com base em aspetos referidos na literatura que se constituem como objetivos de aprendizagem dos estudantes sobre o TVI, nomeadamente: (i) reconhecer a (des)continuidade de uma função num intervalo fechado $[a, b]$; (ii) reconhecer os pressupostos de aplicação do TVI; e (iii) mobilizar os conhecimentos sobre o TVI e aplicá-los na resolução de problemas que o envolve (Strand, 2016).

Na tarefa T_{16}, os estudantes devem recorrer à exploração dinâmica do gráfico de uma função f_k ($k \in \mathbb{R}$) numa *applet* do GeoGebra, e realizar simulações em ponto $(x, f(x))$ e reta horizontal d de equação $y - d = 0$, gerada por modificações de seletores x e d, e testes experimentais do comportamento das imagens $f(x)$, numa vizinhança de $x = x_0$, gerados por modificações em seletor k que descreve o $\lim_{x \to x_0^-} f_k(x) = f(x_0)$, que lhe permitam reconhecer que a continuidade da função em $[a, b]$ é a condição necessária para garantir a existência de $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = d$, onde $d \in [f(a), f(b)]$. No final aplicam esses conhecimentos para resolver um problema de aplicação do TVI, que consiste em provar a existência de raiz de uma função polinomial. Desta forma, os estudantes são conduzidos, autonomamente, à dedução do TVI, sendo esse teorema enunciado formalmente pelo professor, no momento da sistematização das aprendizagens após a aplicação da tarefa.

Por fim, na tarefa T_{17}, é requerido dos estudantes a aplicação de conhecimentos adquiridos sobre o conceito de continuidade e o TVI, para analisar proposições algébricas, provando-as ou justificando as incorreções nelas presentes e resolver problemas que requerem a prova da existência de raízes nas equações que modelam os problemas. Na discussão coletiva, o professor conduz os estudantes à consolidação do TVI e esclarece que esse teorema garante apenas a existência do $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = d$, onde $d \in [f(a), f(b)]$ e não a determinação do seu valor.

Tabela 6.7 – Sistematização das tarefas da sequência IV

Data	Tarefa	Objetivos das tarefas	Ações dos estudantes na exploração do GeoGebra
16/06	$\boldsymbol{T_{13}}$	• Reconhecer a existência do $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e de $f(x_0)$ como condições necessárias (mas não suficientes) à continuidade local de uma função • Deduzir os critérios de continuidade local de uma função a partir do reconhecimento anterior • Analisar a continuidade local de gráfico de funções com base nos critérios de continuidade deduzidos	• Experimentações e visualização de pontos $(x, f(x))$ no gráfico de função f_k, com descontinuidade removível em x_0, gerados por modificações das imagens $f(x)$ • Experimentações e visualização do comportamento das imagens $f(x)$, numa vizinhança do ponto $x = x_0$, gerados por modificações em seletor k que descreve o $\lim_{x \to x_0^-} f_k(x)$
17/06	$\boldsymbol{T_{14}}$	• Traduzir a expressão analítica da função que modela o volume de uma caixa de formato paralelepípedo • Reconhecer a continuidade global de uma função polinomial	• Simulações dinâmicas da planificação (em 2D) e do formato (em 3D) de uma caixa com forma de um paralelepípedo. • Testes experimentais das medidas e dimensões da caixa. • Visualização gráfica da função que modela o volume da caixa.
23/06	$\boldsymbol{T_{15}}$	• Reconhecer limite no ponto representado por sua definição formal. • Dedução da definição formal de continuidade a partir da definição formal de limite • Aplicar a definição formal de continuidade para provar a continuidade local de uma função	----- não contemplado -----
24/06	$\boldsymbol{T_{16}}$	• Reconhecer a (des)continuidade de função num intervalo fechado $[a, b]$ • Reconhecer os pressupostos de aplicação do TVI • Mobilizar os conhecimentos sobre o TVI e aplicá-los na resolução de problemas que o envolve	• Testes experimentais do comportamento das imagens $f(x)$, numa vizinhança do ponto $x = x_0$, gerados por modificações em seletor k que descreve o $\lim_{x \to x_0^-} f_k(x) = f(x_0)$ • Explorações de pontos $(x, f(x))$ e reta horizontal d de equação $y - d = 0$, gerada por de modificações de seletores x e d • Visualização dinâmica da interseção entre a reta d e gráfico de f
30/06	$\boldsymbol{T_{17}}$	• Mobilizar os conhecimentos sobre o TVI e aplicá-los na resolução de problemas que o envolve	----- não contemplado -----

Desta forma, as quatro sequências de tarefas com recurso ao GeoGebra, constituem um percurso de aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade de funções, o qual será complementado com exercícios de consolidação, propostos pelo professor-pesquisador, para serem resolvidos pelos estudantes fora do horário da aula. Alguns destes exercícios serão corrigidos pelo professor-pesquisador nas aulas incluídas no planeamento da experiência de ensino. Salienta-se ainda que, após a aplicação da sequência IV, foi aplicada a segunda tarefa de avaliação (A_2), como forma de avaliar a aprendizagem do conceito de continuidade de funções e de alguns aspetos do conceito de limite não contemplados na A_1. Esta tarefa contém seis questões que exploram conhecimentos sobre as noções intuitivas, cálculo algébrico e definição formal desses conceitos. A descrição dos enunciados de suas questões encontra-se no anexo 11.

6.5. Realização da experiência de ensino

A experiência de ensino foi concretizada no 1º semestre letivo de 2016, seguindo o planeamento apresentado nas secções 6.3 e 6.4. O planeamento inicial sofreu alguns ajustes no decurso da experiência, especialmente na gestão do tempo previsto para a realização das tarefas e no plano de aula, com a transposição da parte 1 da tarefa T_{10} para ser realizada no mesmo dia da aplicação da tarefa T_9. No anexo 7 apresento a descrição da sequência de atividades realizadas na experiência de ensino e que relato, em seguida, de forma resumida. Dezasseis estudantes participaram das aulas até o final do semestre. A minha relação com os estudantes, confiável, sincera e amistosa, facilitou a experiência no decurso de sua realização, e foi construída ao longo das aulas relativas ao ensino das funções reais, as quais antecederam a experiência de ensino.

A primeira aula da experiência de ensino foi destinada à explicação da metodologia de trabalho, seus principais objetivos, potencialidades e possíveis limitações e as atividades que pretendia realizar ao longo da experiência. Informei também os estudantes sobre o planeamento global das atividades letivas, dos instrumentos de avaliação a utilizar e os respetivos critérios de avaliação. Pedi-lhes a colaboração na frequência e participação das aulas, e a permissão para realizar a gravação em áudio e vídeo dos momentos de aplicação e discussão de tarefas em sala de aula. Esclareci que a participação deles não lhe resultaria em quaisquer prejuízos e que o seu anonimato seria garantido na publicação dos resultados. Embora estas indicações tivessem sido feitas no início do semestre letivo, considero o reforço desse pedido, no início da experiência, fundamental para esclarecer e evitar mal-entendidos que poderiam causar falsas expectativas nos estudantes e prejuízos à investigação, tornando-os assim conscientes de todo o processo. O tempo restante da aula foi dedicado à introdução da noção de limite no ponto e à aplicação da tarefa T_1.

Esse momento inicial da experiência de ensino foi marcado pela minha interação com os estudantes, onde, eu interpelava-os sobre o entendimento das noções intuitivas de aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to L$ e eles, por sua vez, respondiam e levantavam questionamentos a fim de esclarecer suas dúvidas. Desta forma, a noção do limite no ponto foi introduzida por mim sem que fossem apresentadas aos estudantes uma definição informal ou formal do limite, buscando construí-las ao longo da experiência de ensino. Após esse momento inicial procedo com a aplicação da tarefa T_1.

A dinâmica das aulas onde foram aplicadas as restantes tarefas exploratórias desenvolveu-se num mesmo ambiente: o laboratório de desenho técnico do IFRJ/Nilópolis. Este ambiente recebeu 15 notebooks, contendo o GeoGebra 5.0, a fim de serem utilizados nos momentos de resolução das tarefas exploratórias da experiência de ensino. As tarefas foram resolvidas pelos estudantes normalmente em pares, os quais foram constituídos por iniciativa dos próprios estudantes, na primeira aula da experiência de ensino, tendo a generalidade dos pares se mantido inalterado até a aplicação da última tarefa. A única exigência que fiz aos estudantes foi pedir que não houvesse par constituído exclusivamente pelos estudantes que foram selecionados para as entrevistas. Eventualmente, quando o número dos estudantes presentes era ímpar, formava-se um trio para resolver a tarefa. Há casos em que estudante resolveu a tarefa individualmente pelo facto de ter chegado bastante atrasado à aula. Cada uma das tarefas foi realizada em três aulas consecutivas, as quais seguiram uma abordagem de ensino exploratório (Canavarro, 2011; Ponte, 2005) que contemplou três momentos, simultâneos: a apresentação da tarefa; a sua realização de forma autônoma pelos estudantes, trabalhando em pares ou em trio; e a discussão coletiva das suas resoluções com a sistematização das aprendizagens pelo professor.

A apresentação de cada tarefa começa com a distribuição aos estudantes do roteiro de suas questões, escrito em papel, as folhas para responder à tarefa e a indicação das *applets* do GeoGebra nos computadores, disponibilizados aos estudantes para serem usados na resolução dessas questões. Conduzo esse momento com a leitura e interpretação do roteiro, buscando clarificar algum aspeto no enunciado das questões ou no contexto da tarefa, que pudesse ser obstáculo à sua resolução. Também realizo pequenas explorações na(s) *applets* usada(s) na tarefa, que são projetadas no quadro por num *datashow*, esclarecendo aos estudantes o seu funcionamento. Informo-os da necessidade de comunicarem as suas ideias na resolução das questões, registando por escrito os seus raciocínios, procedimentos e justificações na folha de resposta, e para não hesitarem de pedir esclarecimentos de suas dúvidas. Esse momento dura cerca de 10 min em cada tarefa.

No momento de realização da tarefa, os estudantes resolveram as suas questões, trabalhando em pares, eventualmente num trio, mantendo um bom relacionamento entre si. Como professor, círculo pela sala de aula, observando o trabalho dos estudantes na resolução da tarefa, e oportunamente esclarecendo-lhes as dúvidas e fazendo-lhes direcionamentos que os auxiliassem a encontrar as suas próprias estratégias de resolução, sem interferir nas suas respostas. Para esse momento tive o auxílio do monitor do LAC, que me acompanhava na sala de aula, registando as minhas interações com os estudantes, por meio de gravação vídeo e com áudio, sem decidir ou interferir sobre o melhor momento da gravação.

No momento da discussão coletiva, alguns estudantes partilharam as suas resoluções, algumas vezes expondo-as no quadro para a turma, explicaram os seus raciocínios e estratégias na resolução de questões, comentaram a dos colegas, e verbalizaram algumas de suas dificuldades. Essas interações entre os estudantes foram guiadas por mim, através de questionamentos, e serviram, por um lado, para eu compreender como os estudantes desenvolvem os significados dos conceitos, quais representações e conhecimentos que mobilizam para resolver problemas e que dificuldades os impede de alcançar as aprendizagens propostas nas tarefas. Por outro lado, serviram para eu consolidar com eles a aprendizagem de aspetos trabalhados na tarefa e apresentar formalmente os conceitos, e as propriedades e procedimentos matemáticos a ele relacionados, realizando para isso, dedução de regras, demonstração de propriedades, resolução de exercícios exemplificativos, entre outros.

Desta forma, as dezassete tarefas exploratórias foram concretizadas na experiência de ensino, e sem apresentar problemas quanto à condução de seus três momentos. No decurso da exposição dos resultados da análise dos dados, apresento excertos do trabalho desenvolvido pelos estudantes na realização dessas tarefas, de forma a clarificar aspetos analisados. Saliento ainda que, ao final da realização de cada tarefa entrego aos estudantes uma ficha de exercícios e problemas referente aos temas trabalhados na aula, para serem resolvidos fora do horário das aulas, visando a consolidação dos seus conhecimentos adquiridos.

As únicas aulas de caráter mais expositivo, contempladas na experiência de ensino, foram seis aulas destinadas à resolução de exercícios e problemas. Essas aulas aconteceram após a realização das sequências de tarefas III e IV e antecederam a aplicação das tarefas de avaliação. Tinham como objetivo consolidar conhecimentos sobre limite e continuidade trabalhados nas aulas anteriores. Os exercícios são previamente selecionados por mim e compõem uma ficha que é distribuída aos estudantes no dia de cada uma das respetivas aulas. Procedo com a resolução de todos os exercícios no quadro, mas com a interação dos estudantes, requerendo que eles verbalizem as hipóteses e tese dos exercícios/problemas e sugiram ideias de suas resoluções. Desta forma, procuro conduzir a resolução dos exercícios/problemas de forma a rever os conteúdos aprendidos na experiência de ensino e a esclarecer possíveis dúvidas antes da aplicação das tarefas de avaliação.

Na última aula da experiência de ensino procuro fazer uma reflexão com os estudantes sobre todo o trabalho desenvolvido ao longo do semestre letivo. Começo por agradecer-lhes pelo envolvimento e participação nas atividades da investigação. Dou-lhes oportunidade de manifestarem livremente suas opiniões sobre o trabalho desenvolvido em sala de aula, destacando aspetos que consideram mais positivos ou negativos e sugestões para a realização de nova experiência de ensino com êxito. No final, solicito-lhes que respondam às questões do questionário final cujos resultados apresento posteriormente neste texto.

Nos próximos três capítulos apresento análise retrospetiva dos dados, que é a terceira fase da experiência de ensino, onde descrevo os resultados das aprendizagens dos estudantes analisadas com base nas três componentes da compreensão e os contributos do GeoGebra para essa compreensão, bem como as opiniões dos estudantes sobre a experiência de ensino.

Capítulo 7

Análise da compreensão do conceito de limite de funções

Neste capítulo apresento os resultados da análise dos dados focada na compreensão do conceito de limite. Começo por apresentar a análise dos significados atribuídos pelos estudantes ao limite. A seguir, apresento uma descrição do trabalho com diferentes representações deste conceito. Por fim, descrevo a análise dos conhecimentos mobilizados pelos estudantes para resolver problemas que envolve o conceito de limite.

7.1. Significados atribuídos ao conceito de limite

Nesta secção analiso os significados que os estudantes revelam do conceito de limite, a partir dos seus *conceito-imagem evocado* e *conceito-definição*. Esta análise é realizada a partir de quatro aspetos associados aos objetivos de aprendizagem deste conceito matemático, nomeadamente, a existência de limite, o limite ser alcançado pela função, o comportamento assintótico da função e a taxa de variação instantânea. Estes significados foram analisados em questões onde os estudantes eram solicitados a decidir sobre a existência do limite apresentado em diferentes representações, com registos informais ou formais, ou ainda interpretar se o limite é alcançado pela função.

7.1.1. Existência do limite

No início do estudo do conceito de limite verifica-se que os estudantes apresentam conceitos imagem associados ao significado do limite de uma função no ponto como *resultado de um processo de aproximação ao objeto* ou *a imagem do ponto através da função*, os quais revelam uma conceção intuitiva do limite no ponto. Isto mesmo se observa nas suas resoluções à questão Q_2T_1, em que os estudantes realizam explorações dinâmicas de pontos $(x, f(x))$ e de aproximações simultâneas $x \to 2$ e $f(x) \to 4$ em gráficos de funções reais $f_k(x)$ $(k = 1, \dots, 4)$ apresentadas em *applets* do GeoGebra, com o objetivo de decidir e justificar sobre a existência do $\lim_{x \to 2} f_k(x)$.

Nas respostas apresentadas a esta questão da tarefa, observa-se que nove dos onze pares de estudantes apresentaram conceitos imagem corretos associados ao significado de limite como *resultado de um processo de aproximação ao objeto* $(x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to L)$. Estes pares usaram termos como "tende a", "se aproxima de" e "convirjo" para traduzir as aproximações simultâneas $x \to x_0$ e $f(x) \to L$, permitindo-lhes explicar corretamente a (in)existência do limite nas condições exploradas. Ademais, verifica-se que as explorações de arrastamento de seletores x e $f(x)$ nas *applets* do GeoGebra, que permitiam simulações de pontos $(x, f(x))$ gerados por aproximações simultâneas $x \to x_0$ e $f(x) \to L$, em gráficos de funções reais, e que visavam conduzir os estudantes a análise do comportamento de funções f em torno do ponto de abscissa $x = x_0$, parece ter favorecido o desenvolvimento dessa significado do limite. Essas conclusões podem ser confirmadas no diálogo do par Fátima e Miriam na resolução à Q_2T_1 (figura 7.1.1).

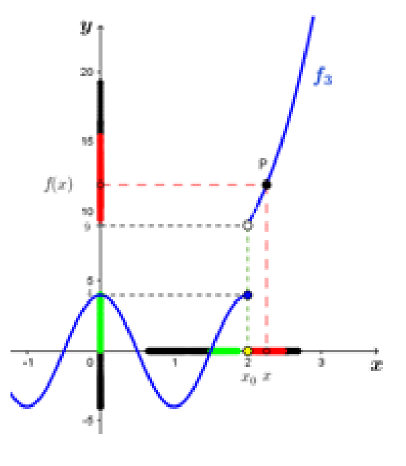
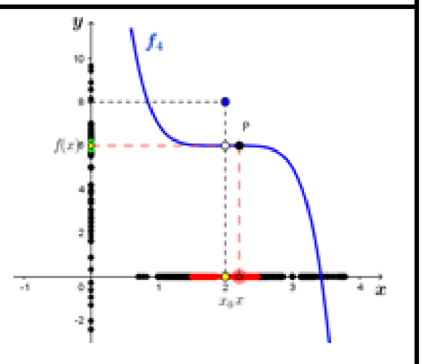
DIÁLOGO DE ANÁLISE DO $\lim\limits_{x \to 2} f_3(x)$	**EXPLORAÇÃO DO GRAFICO DE** f_3 **NO GEOGEBRA**
Miriam: Vou mexer aqui tá? [Na f_3, arrasta x fazendo $x \to 2^+$]. As imagens se aproximam de 9. **Fátima:** Mas nunca é nove. Se aproximam de 9, quer dizer que fica 9,000 ... 1. **Miriam:** Então espera aí! As imagens se aproximam de $f(x)$ [...]. Não pode colocar que $f(x) = 9$. Agora da outra função [$f(x)$ para $x < 2$]. Está se aproximando de ... [interrom-pida por Fátima] [visualizam $f(x) \to 4$ na applet] **Fátima:** de 4. Para $x < 2$, $f(x)$ se aproxima de 4. E $f(x) = 4$, pois a bolinha está fechada [indica o ponto (2,4)] ... **Miriam:** O limite existe? **Fátima:** Acho que não tem limite pois nos outros casos [refere-se f_1 e f_2] todas [$f(x)$] se aproximam do mesmo ponto. Aqui não! [indica $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$] Aqui não tem um ponto em comum que [$f(x)$] vai se aproximar!	
DIÁLOGO DE ANÁLISE DO $\lim\limits_{x \to 2} f_4(x)$	**EXPLORAÇÃO DO GRÁFICO DE** f_4 **NO GEOGEBRA**
Miriam: Calma, $f(x)$ está tendendo ao que? [arrasta x fazendo $x \to 2^+$ e $x \to 2^-$]. Não seria o 6? **Fátima:** Ah tá. Vai se aproximar de 6. Aqui também está se aproximando de 6 também. Tá vendo! [indica na applet $f(x) \to 6$, fazendo $x \to 2$)]. **Miriam:** Mais aí tem ou não tem limite? [analisa novamente $x \to 2$ e $f(x) \to 6$] ... A gente pode falar que o limite é igual a 6 mesmo tendo bolinha aberta? **Fátima:** Eu acho que pode sim, porque ambas [refere-se a $f(x)$ para $x > 2$ e $x < 2$] estão se aproximando do mesmo ponto. [indica na applet $x \to 2$ e $f(x) \to 6$].	

Figura 7.1.1 – Diálogos e explorações no GeoGebra de Fátima e Miriam na resolução da Q_2T_1

No diálogo, Fátima e Miriam realizam juntas explorações de arrastamento do seletor x, nas *applets* do GeoGebra que continham os gráficos das funções f_3 e f_4, fazendo $x \to 2^+$ e $x \to 2^-$ a fim de compreender o comportamento das imagens $f(x)$ quando $x \to 2$. Na análise de f_3, Miriam faz $x \to 2^+$ e conclui: "as imagens se aproximam de 9". Em seguida, faz $x \to 2^-$, visualiza o comportamento de $f(x)$ na *applet*, e quando inicia o relato de sua conclusão é interrompida por Fátima que conclui: "Para $x < 2$, $f(x)$ se aproxima de 4." Na análise da f_4, após explorarem $x \to 2^+$ e $x \to 2^-$ na *applet* essas estudantes reconhecem que $f(x) \to 6$.

A visualização dos efeitos das explorações que fazem nos gráficos das funções, nomeadamente, dos comportamentos dinâmicos das imagens $f(x) \to 9$ quando $x \to 2^+$e $f(x) \to 4$ quando $x \to 2^-$ (na f_3), e de $f(x) \to 6$ quando $x \to 2$ (na f_4), permitiram esse par de estudante concluir corretamente a inexistência de $\lim_{x\to 2} f_3(x)$ e a existência de $\lim_{x\to 2} f_4(x)$, justificando-as com base nas aproximações das imagens $f(x)$, conforme se verifica nos excertos "não tem limite pois nos outros casos (refere-se f_1 e f_2) todas [$f(x)$] se aproximam do mesmo ponto" e "pode sim, porque ambas (refere-se a $f(x)$ para $x > 2$ e $x < 2$) estão se aproximando do mesmo ponto".

Os outros dois pares apresentaram conceitos imagem conflituantes que atribui ao limite o significado da *imagem do ponto através da função.* Para decidir e justificar a (in)existência do limite, eles se basearam nas aproximações simultâneas $x \to x_0$ e $f(x) \to L$, verificando se a igualdade $L = f(x_0)$ era satisfeita. Desta forma, revelam conceitos imagem conflituantes do limite no ponto, válidos apenas para as funções contínuas, a qual impediu-lhes de concluir corretamente a (in)existência dos limites de f_3 e f_4, em $x_0 = 2$, tal como verifica-se na resposta de Cláudio e Pedro à Q_2T_1 (figura 7.1.2).

$\boldsymbol{f_1}$**:** Sim, existe, pois quando $x = x_0$ que é igual a 2, a função $f(x) = 8$ ou seja, atinge o seu limite.
$\boldsymbol{f_2}$**:** A mesma resposta acima, considerando $x_0 = 2$ e $f(x) = 4$.
$\boldsymbol{f_3}$**:** Possui limite quando $x < x_0$ e quando $x > x_0$ não possui limite. Limite para $x < x_0$ é igual a 4 $\Rightarrow f(x) = 4.$
$\boldsymbol{f_4}$**:** Não, pois a função possui intervalo aberto para 2 [$\nexists f(2)$], que é o valor de x_0 . Observando o gráfico, quando x se aproxima de 2, ele passa pelo valor.

Figura 7.1.2 – Transcrição da reposta apresentada por Cláudio e Pedro à Q_2T_1

As expressões verbais sublinhadas nas respostas deste par de estudantes revelam que a sua conceção do limite em x_0 está associada à existência de $f(x_0)$ no gráfico da função f. Esta conceção do limite conduziu estes estudantes a conclusões erradas sobre a existência do limite. Por exemplo, eles concluíram incorretamente que o $\lim_{x \to 2} f_3(x)$ existe e justificaram com base na igualdade da *imagem do ponto através da função* com um dos limites laterais $\left(\lim_{x \to 2^-} f_3(x) = f(2)\right)$, não se apercebendo que a desigualdade dos limites laterais resulta na inexistência do limite. Também mobilizaram este significado sobre o limite para concluir e justificar incorretamente a inexistência $\lim_{x \to 2} f_4(x)$, pois a explicaram com base na falta da imagem $f(2)$, não se apercebendo de que a igualdade dos limites laterais em $x_0 = 2$ é condição necessária para garantir a existência do $\lim_{x \to 2} f_4(x)$.

No momento da discussão coletiva desta tarefa T_1, o professor questiona os alunos da turma sobre a existência de $\lim_{x \to 2} f_k(x)$ nas funções f_1, f_2, f_3 e f_4. Nos casos das funções f_2 e f_4, em que o limite existia mas os seus gráficos apresentavam interrupção no ponto $(2, f(2))$, alguns estudantes responderam que o limite existia e valia 4, enquanto que outros afirmavam a inexistência do limite, justificando com base na 'descontinuidade' gráfica de f_k em $x_0 = 2$. Não havendo consenso nas respostas dos estudantes, relativamente à (in)existência de limite de f_2 e f_4 em $x_0 = 2$, devido à interrupção que observam nos gráficos, o professor recorreu à exploração dinâmica do gráfico da função f_4 e reforçou a pergunta: "O limite desta função quando $x \to 2$ existe ou não existe? Lembrem-se que estamos a considerar o limite de uma função como o resultado do comportamento das imagens $f(x)$ quando x se aproxima de um ponto de abscissa x_0". Após um momento de análise, tendo alguns estudantes recorrido à exploração da *applet*, arrastando o seletor x de modo que $x \to 2$, e visualizando o comportamento de $f(x)$ no gráfico de f_4, quase a totalidade da turma reconheceu a existência do limite como resultado do comportamento convergente da função.

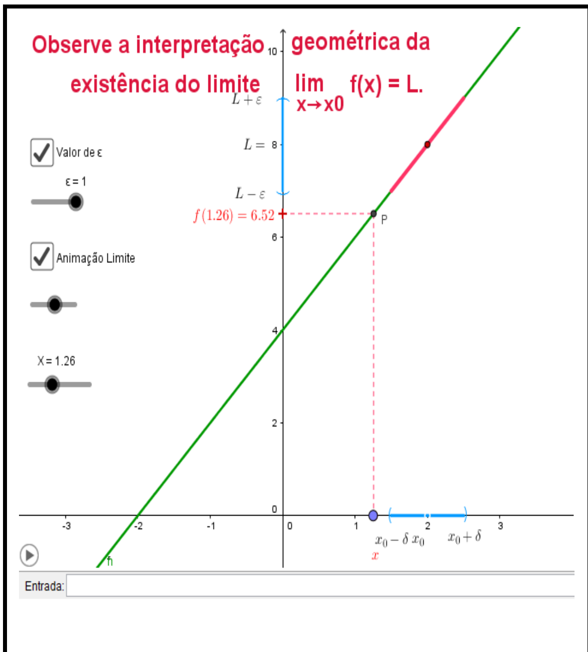
O professor consolidou essa ideia com os estudantes explicando-lhes que o limite tem caráter estático, ou seja, é um "valor fixo" que indica a "convergência", a "direção" tomada pelo comportamento da função. Ele aproveitou um questionamento anterior da estudante Miriam – "Então só existirá limite se a função for contínua?" – para esclarecer que no caso das funções serem contínuas, o limite coincidirá com a imagem do ponto através da função $\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\right)$. Apresentou exemplos de funções em que a existência do $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ é confirmada, sem, contudo, a função f ser contínua. Desta forma, o professor conduziu os estudantes à consolidação do critério de existência do $L =$

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ a partir da existência de limite laterais $\left(L = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)\right)$ e a reconhecer três possíveis casos de existência de limite, nomeadamente: (i) $L = f(x_0)$; (ii) $L \neq f(x_0)$ e (iii) L existe mas $\nexists\, f(x_0)$.

Após esta experiência inicial, verifica-se que as conceções dos estudantes sobre o limite de uma função no ponto foram atualizadas por conceções algébricas e informais, como se observa na interpretação que fazem do limite representado algebricamente pela simbologia $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ (Q_1T_2) e geometricamente numa *applet* do GeoGebra (Q_2T_3). Verifica-se que Talita (que resolveu individualmente) e seis dos oito pares de estudantes, na Q_1T_2, bem como seis dos dez pares, na Q_2T_3, apresentaram conceitos imagem associado ao significado de limite como *resultado de um processo de aproximação ao objeto*. Por exemplo, André e Paulo, na Q_1T_2 "O que essa informação ($\lim_{x \to 2} f(x) = 1$) significa para você? respondem: "Na função, quando <u>x se aproxima de 2</u>, tanto pela esquerda quanto pela direita, $f(x)$ <u>se aproxima de 1</u>" e Cláudio e Pedro, na questão Q_2T_3: "O $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe? Justifique a sua resposta e, caso o limite exista, determine o seu valor", respondem: "Sim. Quando <u>x se aproxima de x_0</u> pela direita ou pela esquerda sua <u>imagem tende a 4</u>. $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$".

Os outros dois pares de estudantes na Q_1T_2 e quatro pares na Q_2T_3, atribuíram ao limite o significado do *resultado da igualdade dos limites laterais*. Para concluir sobre a existência do limite, estes estudantes basearam-se na análise dos limites laterais e na sua igualdade, conforme é exemplificado pelas respostas de Gil e Maria, "Significa que na função $f(x)$, quando x tende a 2, <u>seus limites laterais</u> se aproximam de $y = 1$, determinando $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$" (Q_1T_2), e de Eliseu e Vítor "Sim, porque $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$, ou seja, $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$" (Q_2T_3).

Essas conceções intuitivas sobre o limite no ponto foram atualizadas e complementadas com conceções formais, após os estudantes resolverem a T_4, que visava conduzi-los à aprendizagem da definição formal de limite. Nesta tarefa, os estudantes realizaram explorações da representação geométrica do limite, representada numa *applet* do GeoGebra, cujos registos assentam-se na expressão algébrica dessa definição formal. Há evidencias de que as explorações e simulações das vizinhanças $V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$ a partir de modificações dos valores de seus raios (δ e ε), e dos pontos $(x, f(x))$ com $x \in V_\delta(x_0)$ e $f(x) \in V_\varepsilon(L)$, tenha favorecido o desenvolvimento de conceitos imagem, pelos estudantes, do limite no ponto em termos das noções de vizinhanças $x \in V_\delta(x_0)$ e $f(x) \in V_\varepsilon(L)$, tal como exemplificado pela transcrição do diálogo entre Fátima e Miriam na resolução desta tarefa e posteriormente na sua resposta à $Q_{12}T_4$ (figura 7.1.3).



Miriam: Vamos ver na questão 11 o que ele pergunta: O que acontece com os valores de $f(x)$ à medida que $x \in V_\delta(2)$? [diminui o seletor ε fazendo $\varepsilon \to 0$ e arrasta o x de modo que $x \in V_\delta(2)$ e visualiza $f(x) \in V_\varepsilon(8)$ com $d(2+\delta, 2-\delta) \to 0$ e $d(8+\varepsilon, 8-\varepsilon) \to 0$ na *applet*]. Ué, os valores de $f(x)$ tendem a 8!
Fátima: Sim, isso mesmo! O limite é 8.
Miriam: Acho que é por isso que ele pede na questão 12 a definição do limite, pois isso aí é o limite [indica $f(x) \in V_\varepsilon(8)$ na *applet*]
Fátima: Vai, vamos ver a 12.
Miriam: Deixa eu ler [lê a $Q_{12}T_4$]. Então espera aí! Para $x \in V_\delta(2)$ … [fixa $\varepsilon = 0{,}5$, faz $x \in V_\delta(2)$ e visualiza $f(x) \in V_\varepsilon(8)$ na *applet*]. Coloca então: Para $\lim_{x\to 2} 2x + 4 = 8$ temos que, para $x \in V_\delta(2)$, isso quer dizer que x está na vizinhança de 2 [indica na *applet* $x \in V_\delta(2)$], temos que, não! Espera aí, coloca uma setinha e y [$f(x)$] pertence a vizinhança do limite 8.

$Q_{12}T_4$: A partir das ideias trabalhadas nas questões anteriores apresente uma definição do $\lim_{x\to 2} 2x + 4 = 8$, tomando como base as ideias de vizinhanças $V_\varepsilon(8)$ e $V_\delta(2)$.

Para $\lim_{x\to 2} 2x+4 = 8$, temos que para $x \in V_\delta(2) \to y \in V_\varepsilon(8)$

Figura 7.1.3 – Diálogo, exploração no GeoGebra e resposta de Fátima e Miriam à $Q_{12}T_4$

No diálogo, verifica-se que as explorações realizadas por Fátima e Miriam na *applet* do GeoGebra, de pontos $(x, f(x))$ com $x \in V_\delta(2)$ e $f(x) \in V_\varepsilon(8)$ e das vizinhanças $V_\delta(2)$ e $V_\varepsilon(8)$, parece ter favorecido o reconhecimento desse par de estudantes sobre o comportamento convergente das imagens $f(x) \to 8$, pois após arrastar os seletores ε e x e visualizar os efeitos dessas explorações nas vizinhanças, nomeadamente, $x \in V_\delta(2)$ e $f(x) \in V_\varepsilon(8)$ com $d(2+\delta, 2-\delta) \to 0$ e $d(8+\varepsilon, 8-\varepsilon) \to 0$, Miriam conclui que "os valores de $f(x)$ tendem a 8!" e Fátima afirma que "o limite é 8". Para apoiar o seu raciocínio na tradução do limite por uma expressão algébrica com base na noção de vizinhanças ($Q_{12}T_4$), Miriam recorre à *applet*, fixa $\varepsilon = 0{,}5$, faz

$x \in V_\delta(2)$, visualiza $f(x) \in V_\varepsilon(8)$ e encaminha, juntamente com Fátima, a escrita da resposta da $Q_{12}T_4$.

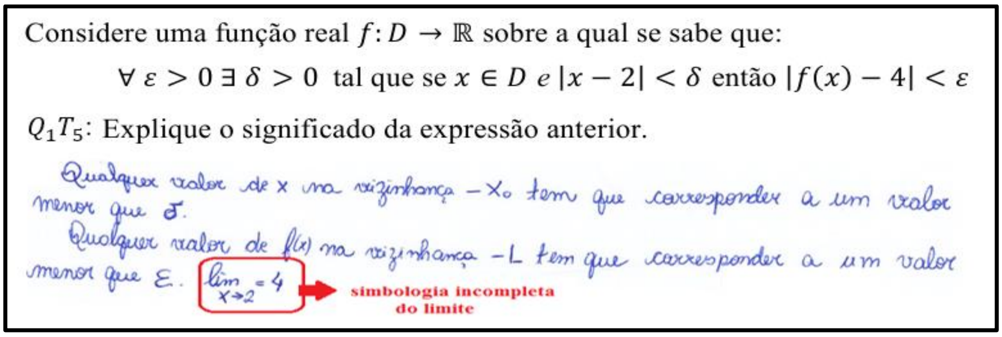
Os excertos do diálogo 'para $x \epsilon V_\delta(2)$ … temos que' e 'y pertence à vizinhança do limite 8' e a resposta deste par à $Q_{12}T_4$ evidenciam que a noção do limite no ponto como resultado da *correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança* $(x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L))$ passou a fazer parte do *conceito-definição* de Fátima e Miriam, uma vez que para definir o $\lim_{x \to 2} 2x + 4 = 8$ associam-no corretamente à implicação "$x \in V_\delta(2) \to y \in V_\varepsilon(8)$".

Após essa experiência, os estudantes foram desafiados a explicarem o significado da expressão algébrica que define formalmente o limite (Q_1T_5 e Q_1T_{15}), e a justificar a existência do limite no ponto a partir da análise de sua representação geométrica, cujos registos assentam expressão algébrica da definição formal do limite, na $Q_5\, T_5$.

Os resultados revelam que o significado do limite como *resultado de um processo de aproximação ao objeto* está associado aos conceitos imagem de três dos nove grupos (8 pares e 1 trio), na Q_1T_5, e quatro dos nove pares, na Q_1T_{15}, os quais recorreram à termos como "tende a", "se aproxima de" e "aproximando-se" para traduzir as desigualdades $|x-2| < \delta$ e $|f(x)-4| < \varepsilon$ e concluir corretamente sobre o limite, tal como exemplificado nas respostas de Joelson e Jorge (Q_1T_5): *"Para todo valor de* $x \to x_0 = 2$, $f(x)$ se aproxima de 4" e de Luiz e Rui (Q_1T_{15}): "Significa que quando x tende a 2, a função tende a 4. Logo $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$".

Outros três grupos de estudantes, na Q_1T_5, e os restantes quatro pares que responderam corretamente à Q_1T_{15}, apresentaram conceitos imagem corretos associados ao significado de limite como resultado de uma *correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança* $(x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L))$. Os estudantes apresentaram explicações corretas das simbologias $|x-2| < \delta$ e $|f(x)-4| < \varepsilon$, baseadas na noção de vizinhança, e reconhecem o limite nesta correspondência evidenciado pelo uso da simbologia $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$, tal como na resposta de Adilson e Soares na Q_1T_5: "Significa que $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$, onde a expressão $|x-2| < \delta$ é a vizinhança em torno de x_0 e δ é o raio, e $|f(x)-4| < \varepsilon$ representa a vizinhança em torno de L e $\mathcal{E}$ é o raio" e na de Fátima e Miriam na Q_1T_{15}: "Para uma vizinhança em torno $x_0 = 2$ de raio δ, a função $f(x)$ varia em torno de uma vizinhança de $L = 4$ e raio ε. $\mathrm{Lim}_{x \to 2} f(x) = 4$".

Os outros três grupos de estudantes que responderam à Q_1T_5, incluindo o único par que consideramos não ter reconhecido o limite na Q_1T_{15}, parecem não ter atribuído significado ao limite expresso por sua definição formal. Estes estudantes apresentaram explicações incompletas, por vezes até incoerentes, indicativas de memorização de algumas das simbologias da definição formal de limite, revelando dificuldades na sua compreensão, tal como se observa na resposta de Beatriz, André e Paulo (figura 7.1.4):



Considere uma função real $f: D \to \mathbb{R}$ sobre a qual se sabe que:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que se } x \in D \text{ e } |x-2| < \delta \text{ então } |f(x)-4| < \varepsilon$$

Q_1T_5: Explique o significado da expressão anterior.

Qualquer valor de x na vizinhança $-x_0$ tem que corresponder a um valor menor que δ.
Qualquer valor de $f(x)$ na vizinhança $-L$ tem que corresponder a um valor menor que ε. $\boxed{\lim_{x\to 2} = 4}$ simbologia incompleta do limite

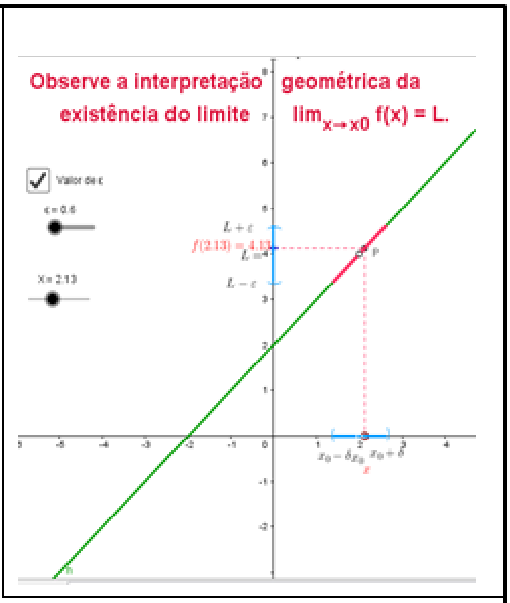
Figura 7.1.4 – Resposta do trio Beatriz, André e Paulo à Q_1T_5

Esta explicação confusa e incorreta da simbologia $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ revela incompreensões no significado de vizinhança pois os estudantes afirmam “x [...] tem que corresponder a um valor menor que δ”, não se apercebendo que será a distância do x ao x_0 e não o x, que terá um valor inferior a δ. A simbologia incompleta que usaram para representar o limite mostra que reconheceram o limite na sua definição formal, mas que a memorizaram sem lhe atribuir significado.

Já na Q_5T_5, após os estudantes terem explorado o limite representado geometricamente – numa *applet* do GeoGebra – contendo registos assentes na expressão algébrica da definição formal, todos os oito pares e um trio de estudantes atribuíram corretamente significado ao limite para reconhecer e justificar a sua existência nas condições exploradas. Há evidências de que explorações que realizaram na *applet* do GeoGebra, permitiu a consolidação de significados corretos do limite como *resultado de um processo de aproximação ao objeto* ou *resultado da igualdade dos limites laterais*, e o desenvolvimento de conceitos imagem corretos do limite como *resultado de uma correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança* ($x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$), sendo esses significados representativos de todos os estudantes ao responderem a esta questão.

De facto, as simulações de pontos $(x, f(x))$, que mostram aproximações sucessivas de $x \to 2^+$, $x \to 2^-$ e $f(x) \to 4$ na *applet*, parecem ter possibilitado a sete dos nove pares de estudantes o reforço dos seus conceitos imagem do limite como *resultado de um processo de aproximação ao objeto* (quatro pares) e/ou *resultado da igualdade dos limites laterais* (três pares), tal como exemplifica-se no diálogo do par Cláudio e Pedro na resolução e resposta à Q_5T_5 (figura 7.1.5).

Pedro: O que acontece com o valor de cada imagem? Ah, de cada imagem! Então aqui óh, cada imagem, óhhh ... [arrasta $x \in V_\delta(2)$ e visualiza $f(x) \in V_\varepsilon(4)$ o *applet*]. Elas se <u>aproximam</u> na mesma quantidade, tá vendo? 4,11 e 4,11; 4,12 e 4,12; 4,13 e 4,13.
Cláudio: O de baixo é 2 [corrige-o, indicando que é 2,11 e 4,11 ...].
Pedro: Elas estão aumentando um décimo. Aqui [indica $V_\delta(2)$ na *applet*] aumenta um décimo e aqui [indica $V_\varepsilon(4)$ na *applet*] aumenta um décimo.
Cláudio: Beleza! Você aproxima 0,1 do $x_0 = 2$ então $[f(x)]$ se aproximou 0,1 do 4.
Pedro: Então a cada vez que você se <u>aproxima</u> do x_0 pela direita, em $x_0 + \delta$, no limite $+\varepsilon$, $f(x)$ se <u>aproxima</u> na mesma proporção [...]. Nessas condições existe o limite? Sim, 4. Por quê?
Cláudio: Porque os limites laterais são iguais [observa a igualdade dos comportamentos laterais de f na applet]. A gente tem que botar esta definição [$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$]. Esta definição aqui que ele vai querer. Porque essa definição de aproximação, acabou, ele não quer mais.
Pedro: Mas a gente pode colocar que o limite, quando x <u>tende</u> pelo lado esquerdo é igual ao limite quando x <u>tende</u> pelo lado direito. É a mesma coisa.



Q_5T_5: Nestas condições, o $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe? Caso exista qual é o seu valor? Justifique sua resposta

Sim. 4. Como os limites bilaterais são iguais, logo $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe.

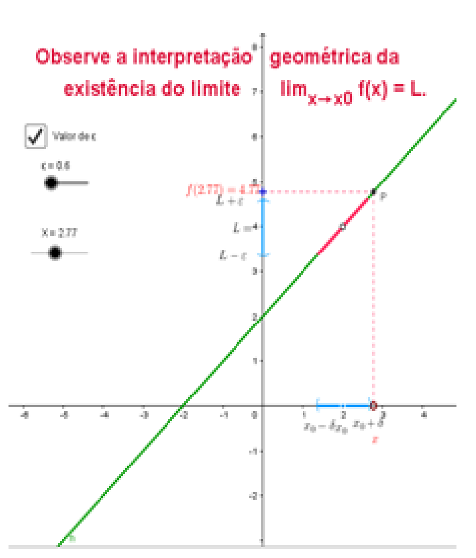
Figura 7.1.5 – Diálogo, exploração no GeoGebra e resposta de Cláudio e Pedro à Q_5T_5

No diálogo, Cláudio e Pedro realizam juntos explorações na *applet*, arrastando os pontos $x \in V_\delta(2)$ e visualizando $f(x) \in V_\varepsilon(4)$, como forma de analisar o comportamento das imagens $f(x)$, confirmado nos excertos "tá vendo? 4,11 e 4,11; 4,12 e 4,12; 4,13 e 4,13"(Pedro) e "Você aproxima 0,1 do $x_0 = 2$ então $[f(x)]$ se aproximou 0,1 do 4" (Cláudio). A visualização dos efeitos geométricos dessas explorações, indicando valores numéricos das imagens $f(x)$ convergindo para $f(x) = 4$ à medida que x converge para $x_0 = 2$, parece ter possibilitado a esses estudantes a mobilização de conceitos imagem associados ao significado do limite como *resultado de um processo de aproximação ao objeto* para concluir a existência de $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$, pois, com base nessa exploração, mobilizaram *conceitos imagem* sobre aproximações simultâneas $x \to 2$ e $f(x) \to 4$, para concluir sobre a existência do limite, conforme se verifica na conclusão de Pedro: "Então a cada vez que você se aproxima do x_0 pela direita, em $x_0 + \delta$, no limite $+_\varepsilon$, $f(x)$ se aproxima na mesma proporção [...]. Nessas condições existe o limite? Sim, 4".

Para justificar a existência do limite, Cláudio sugere a escrita da representação algébrica da igualdade dos limites laterais $\left(\operatorname{Lim}_{x\to 2^-} f(x) = \operatorname{Lim}_{x\to 2^+} f(x)\right)$ como resposta à Q_5T_5. Esta indicação de Cláudio revela a sua conceção do limite como *resultado da igualdade dos limites laterais* sendo mobilizada a partir das explorações que realizou no GeoGebra, pois ao visualizar na *applet* a igualdade dos comportamentos laterais de f justifica: "Porque os limites laterais são iguais". Desta forma, foram capazes de reconhecer do limite representado geometricamente.

Também se verifica que simulações dos parâmetros ε e δ, respetivos raios das vizinhanças $V_\varepsilon(4)$ e $V_\delta(2)$, e de pontos $(x, f(x))$, geradas por simulações de x e $f(x)$ nos intervalos $]2-\delta, 2+\delta[$ e $]4-\varepsilon, 4+\varepsilon[$, possibilitaram ao par restante e ao trio de estudantes desenvolverem conceitos imagem corretos da definição formal de limite, permitindo-lhes reconhecer o limite e atribuí-lhe significado como resultado de uma *correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança*, tal como exemplificado no diálogo do par Eliseu e Vítor durante a resolução e resposta Q_5T_5 (figura 7.1.6).

Vítor: E simples! Para todo ε existe um δ com a mesma variação [realiza exploração de ε e δ na *applet*]. E por isso que aquela fórmula lá começa pelo ε [refere-se à definição formal]. Para todo ε existe um δ. O que eu estou querendo dizer é que conforme a variação de ε será a variação de δ, nas mesmas proporções.
Eliseu: Não! Depende da função. Não é na mesma proporção!
Vítor: Não, claro! Dependendo da função claro. Mas em qualquer função quando estiver a proporção de ε vai variar na mesma relação de δ. Repara que quem varia aqui é ε e não δ [indica na *applet*].
Eliseu: Então, no caso aqui (explora $x \in V_\delta(2)$ e $f(x) \in V_\varepsilon(4)$ na *applet*), todos os valores, todos os valores de x tem correspondente em ε! [indica os pontos $x \mapsto f(x)$, com $x \in V_\delta(2)$ e $f(x) \in V_\varepsilon(4)$]
Vítor: Ah lá, $V_\delta(2)$ tem! [visualiza na *applet* que $x \in V_\delta(2)$) e $f(x) \in V_\varepsilon(4)$]. Todos têm correspondentes. Então responde isso!



Q_5T_5: Nestas condições, o $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe? Caso exista qual é o seu valor? Justifique sua resposta.

Sim e é 4 pois a vizinhança de δ tem correspondente em ε
Todos os valores de $x \in V_\delta(2)$ tem correspondentes em $L \in V_\varepsilon(4)$

Figura 7.1.6 – Diálogo, exploração no GeoGebra e resposta do par Eliseu e Vítor à Q_5T_5

No diálogo, fica evidente que as explorações dos parâmetros ε e δ na *applet* do GeoGebra, cujos efeitos apresentavam a variação de δ como dependência da variação de ε, favoreceram a descoberta de Vítor sobre a existência de relação funcional entre ε e δ, e permitiu-lhe associá-la à simbologia '$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$' da definição formal de limite, pois conclui dessas explorações: "É simples! Para todo ε existe um δ com a mesma variação. É por isso que a fórmula lá começa pelo ε. Para todo ε existe um δ " (Vítor).

Ademais, os excertos de Eliseu "no caso aqui, todos os valores x tem correspondente em ε! [indica na *applet* os pontos $(x, f(x))$, com $x \in V_\delta(2)$ e $f(x) \in V_\varepsilon(4)$]" e de Vítor "Ah lá, $V_\delta(2)$ tem!" revelam que a visualização dos efeitos das explorações dos pontos $\left(x, f(x)\right)$ com $x \in V_\delta(2)$ e $f(x) \in V_\varepsilon(4)$, que apresentavam correspondência de pontos $(x, f(x))$, e a amplitude dos intervalos $]2-\delta, 2+\delta[$ e $]4-\varepsilon, 4+\varepsilon[$ tendendo à zero, permitiram Eliseu e Vítor reconhecerem o limite como resultado da *correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança*, uma vez que baseados nessas explorações, para justificar a existência do $\operatorname*{Lim}_{x\to 2} f(x) = 4$ (Q_5T_5), estabelecem correspondência correta e implicativa entre elementos (x e $f(x)$) e as vizinhanças $V_\delta(2)$ e $V_\varepsilon(4)$, conforme é possível confirmar no excerto de sua resposta à Q_5T_5: "todos os valores de $x \in V_\delta(2)$ tem correspondentes em $L \in V_\varepsilon(4)$".

Ainda sobre o significado do limite como resultado da *correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança*, aponto que a maioria dos estudantes foram capazes de mobilizá-lo para interpretar expressões algébricas que define formalmente o limite infinito (Q_1T_8) e representar formalmente o limite no infinito (Q_7T_{11}), indicando assim que este significado consolidou-se no conceito-imagem desses estudantes.

Na Q_1T_8, em que os estudantes analisaram a representação geométrica de $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$, com registos assentes na expressão algébrica de sua definição formal, verifica-se que todos os dez grupos de estudantes apresentaram conceitos imagem corretos do limite como resultado da *correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança*, para concluir corretamente que a expressão $\forall\ M > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $|x-2| < \delta$ então $f(x) > M$ (item **c)**) traduzia o referido limite infinito. Tal como exemplificado na resposta de Elias e Robson "c) Correto. Pois para qualquer valor $M > 0$, aparecerá um intervalo $|x-2| < \delta$ e a $f(x) > M$". Estes estudantes foram capazes de associar a desigualdade $M > 0$ e o comportamento infinito das imagens $f(x)$

à desigualdade $f(x) > M$, e apresentar explicações adequadas e elucidativas, contendo os registos $|x-2| < \delta$ e $f(x) > M$, para justificar o limite infinito.

Já na Q_7T_{11}, em que os estudantes foram desafiados a representar o limite no infinito $\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right)$, representado geometricamente numa *applet* do GeoGebra, com registos assentes na sua definição formal, verifica-se que seis dos nove pares de estudantes atribuíram-lhe significado como resultado da *correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança*. Eles reconheceram a implicação $x > A \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(0)$ e o papel dos quantificadores $\forall\varepsilon > 0$ e $\exists A > 0$ e, com base nessas noções, apresentaram uma correta expressão algébrica para traduzir o limite no infinito, tal como exemplificado na resposta de Ismael e Jorge "$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ A > 0\ /\ x \in D$ e $x > A$ então $|f(x) - 0| < \varepsilon$".

Os demais três pares de estudantes que considerei não ter representado o limite no infinito na sua definição formal, parecem não ter atribuído significado ao limite no infinito. Estes estudantes apresentaram o registo incorreto da correspondência implicativa $x > A \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(0)$, por vezes desassociada do papel dos quantificadores, revelando dificuldades na compreensão da definição formal de limite no infinito, tal como verifica-se na resposta de Adilson e Soares (figura 7.1.7). A resposta apresentada por este par que contém registo incorreto de $f(x) \in V_\varepsilon(0)$ (regista $f(x) < \varepsilon$ ao invés de $|f(x) - 0| < \varepsilon$), e indicação incorreta dos quantificadores (indica $\forall\ x > A$ e $\exists\ f(x) < \varepsilon$ ao invés de $\forall\ \varepsilon > 0$ e $\exists\ A > 0$), revelam incompreensões no significado da implicação $x > A \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(0)$ e do papel dos seus quantificadores para traduzir formalmente o limite, evidenciando não ter lhe atribuído significado.

Q_7T_{11}: A partir das ideias trabalhadas nas questões anteriores, escreva uma definição formal para o conceito matemático apresentado na questão 6?

7- $\forall\ x > A\ \exists\ f(x) < \varepsilon$ de forma que todos os valores maiores que A estão na vizinhança em torno de L, ou seja $-\varepsilon < y < \varepsilon$

Figura 7.1.7 – Resposta de Adilson e Soares à Q_7T_{11}

A diversidade de significados corretos que a generalidade dos estudantes atribui ao limite de uma função no ponto, para analisar a sua existência, e que são associados aos seus respetivos c*onceito-imagem*, permanece até o fim do estudo sendo confirmada na segunda entrevista, quando os estudantes entrevistados foram desafiados a ‘descrever tudo o que sabem sobre a informação $\lim_{x \to 3} f(x) = 3$’ **($Q_1 E_2$).** Verifica-se que todos os entrevistados reconheceram o limite na expressão algébrica apresentada e atribuíram-lhe significados corretos, como resultado *do processo de aproximação ao objeto, da igualdade dos limites laterais* ou *da correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança.* Esta conclusão pode ser verificada na transcrição das respostas desses estudantes à **(**$Q_1 E_2$), que apresento a seguir (figura 7.1.8).

Resposta de Maria	**Resposta de Eliseu**
Para todo valor referente a x se aproximando de $x_0 = 2$ existe um valor correspondente $f(x)$ que se aproxima de 3, sendo estes valores membros de uma vizinhança determinada pelos intervalos entre $x_0 - \delta$ e $x_0 + \delta$ para x e $L - \varepsilon$ e $L + \varepsilon$ para $f(x)$. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que se $x \in D\ e$ $\lvert x - 2 \rvert < \delta \;\Rightarrow\; \lvert f(x) - 3 \rvert < \varepsilon$	O limite da função $f(x)$ quando x tende a 2, tanto pela direita quanto pela esquerda é 3 $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$
Resposta de Pedro	**Resposta de Miriam**
Analisando o comportamento em torno de $x_0 = 2$, de raio δ, temos uma aproximação de $L = 3$, no eixo y. $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$, logo o limite existe. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que se $x \in D\ e$ $\lvert x - 2 \rvert < \delta$ então $\lvert f(x) - 3 \rvert < \varepsilon$	Quando x se aproxima de 2, tanto pela direita quanto pela esquerda, $f(x)$ se aproxima de 3. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$ $\forall\, B > 0\ \exists\, A > 0,\ x \in D\ e\ \lvert x - 2 \rvert < A \Rightarrow$ $\lvert f(x) - 3 \rvert < B$

Figura 7.1.8 – Extrato de resposta apresentada pelos entrevistados à $Q_1 E_2$

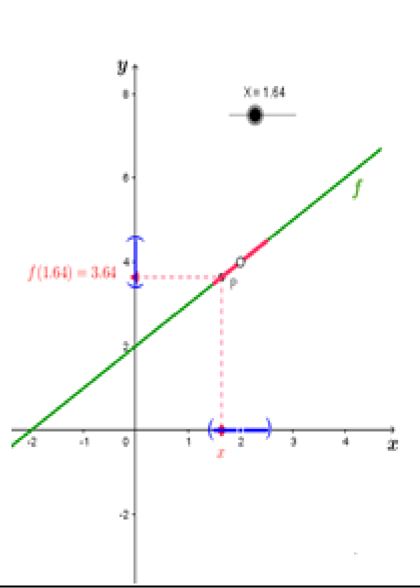
Os registos das respostas apresentadas confirmam que o significado do limite no ponto associado ao *processo de aproximação ao objeto* (todos os entrevistados), *a igualdade dos limites laterais* (com exceção de Maria) e *a correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança* (com exceção de Eliseu) fazem parte do *conceito-imagem* desses estudantes e são mobilizados para justificar a existência do limite representado por sua simbologia algébrica.

7.1.2. O limite é alcançado pela função

Os significados que os estudantes revelam do limite no ponto para decidir se o limite é ou não alcançado (atingido) pela função, foram abordados nas questões $Q_3 T_3$, $Q_6 T_5$ e $Q_7\, T_{12}$. Na tarefa T_3, em que os estudantes exploraram numa *applet* do GeoGebra a representação geométrica do limite $L = \lim_{x \to 2} f(x)$ (com $f(2)$ não definida), para decidir e justificar se o limite (L) é alcançado pela função (Q_3T_3), verifica-se que apenas o par Elias e Talita indicou corretamente, ao responder a Q_3T_3, que o limite era alcançado pela função sem, no entanto, apresentar justificativa por escrito.

Os demais nove pares de estudantes concluíram incorretamente que o limite não é alcançado pela função, embora reconhecessem a sua existência e valor. Estes estudantes apresentaram um *conceito-definição* de limite como resultado de um processo contínuo de aproximação das imagens $f(x)$ a um número real L e que jamais poderá ser alcançado quando $L \neq f(x_0)$, evidenciando assim, que até este momento do estudo, $L = f(x_0)$ fazia parte de seus respetivos *conceito-imagem*, conforme se verifica no diálogo do par Maria e Vera na resolução e resposta a Q_3T_3 (figura 7.1.9).

Maria: O limite existe? ... [faz $x \to 2^+$ e $x \to 2^-$ arrastando x na *applet* e visualiza $f(x)$]. Sim. Os limites laterais em x_0, seja pela direita ou pela esquerda, são iguais a 4.
Vera: Os comportamentos laterais tendem ao mesmo número. [...] Esse limite é alcançado pela função? [analisam juntas o comportamento de $f(x)$ na *applet* e visualizam que $f(x) = 4$ não pertence a função].
Maria: Ah! Não! Não é alcançado! Porque, sendo o $f(2)$ indefinido, a função nunca chegará à imagem igual a 4. [faz $x \to 2$ na *applet* e quando $x = 2$ apresenta mensagem "indefinido"].
Vera: Como assim?
Maria: A função é essa reta. Só que este ponto 4 aqui é bolinha aberta porque não pertence a função. [na *applet*, indica no gráfico de f a inexistência de $f(2) = 4$].
Vera: Então é porque o limite [a ideia de que o limite é a imagem da função] não pertence a essa função, certo?
Maria: Sim, o limite não pode ser alcançado pela função pois $f(x) = 4$ não pertence a função.



Q_3T_3: Caso exista, esse limite é alcançado pela função?

Não. O limite não pode ser alcançado pela função, pois $f(x) = 4$ não pertence à função.

Figura 7.1.9 – Diálogo e exploração no GeoGebra do par Maria e Vera na resolução da Q_3T_3

No diálogo, fica evidente que a visualização das explorações dinâmicas realizadas por este par de estudantes na *applet* para analisar os comportamentos laterais das imagens $f(x)$, permitiram-lhes reconhecer a existência do $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$, pois arrastam o seletor x fazendo $x \to 2^+$ e $x \to 2^-$, visualizam o comportamento de $f(x)$ e concluem: "os limites laterais em x_0, seja pela direita ou pela esquerda, são iguais a 4"(Maria) e "os comportamentos laterais tendem ao mesmo número"(Vera).

Contudo, para decidirem se o limite é alcançado pela função, essas estudantes recorrem novamente a análise das aproximações simultâneas $x \to 2$ e $f(x) \to 4$ no gráfico da função f e visualizam que o ponto $\big(2, f(2)\big)$ não estar apresentado no gráfico da função f ($\nexists\ f(2)$). Com base nos efeitos dessas explorações, visualizam que "a função nunca chegará à imagem igual a 4"(Maria) e concluem que "o limite não pode ser alcançado pela função pois $f(x) = 4$ não pertence a função" ao responderem a Q_3T_3. Desta forma, essas estudantes apresentaram conceitos imagem do limite como *a imagem do ponto através da função*, e que ao serem mobilizados para decidir se o limite é alcançado pela função, num contexto em que $f(x_0)$ não está definida (($\nexists\ f(x_0)$)), configura-se num conflito cognitivo à conceção do limite ser alcançado pela função, resultando no significado do limite como *resultado de um processo de aproximação inalcançável da $f(x)$, quando $L \neq f(x_0)$.*

No momento da discussão coletiva da T_3, após os estudantes serem questionados pelo professor sobre o porquê de o limite ser alcançado pela função, Talita respondeu: "porque os valores para x, se aproximando pela direita ou pela esquerda, independente se a imagem do ponto x_0 está contido ou não está contido no gráfico, todos eles estão se aproximando de 4". Esse *conceito-definição* do limite apresentado por Talita, evidencia atribuir significado correto ao limite como *resultado do processo de aproximação convergente ao objeto*, pois se baseia na convergência das imagens $f(x)$ quando $x \to x_0$ para concluir corretamente sobre o limite ($L = 4$) ser alcançado pela função.

Outros dois estudantes também apresentaram as suas explicações sobre o porquê do limite não ser alcançado pela função. Nas explicações de Eliseu "*Não, <u>porque a função não existe nesse ponto</u>. Já que a função não existe nesse ponto como ela pode ser alcançada?*" e de Maria "*<u>Não existe</u> nenhum <u>valor de x</u> que faça a <u>$f(x)$ ser igual a</u>* <u>4</u>", os termos sublinhados confirmam que para estes estudantes o limite (L) só pode ser alcançado quando coincidir com a $f(x_0)$, indicando assim a presença de dificuldades.

O professor então retomou a palavra e perguntou aos estudantes: "o limite existe?" Todos responderam que sim. O professor então encaminhou a uma nova pergunta a fim de levá-los a raciocinar e refletir sobre impossibilidade de o limite existir e não ser alcançado pela função: "Todos vocês estão convencidos de que o limite existe e é 4, certo? Pois a minha pergunta é: este limite $L = 4$ é alcançado pela função?"

Após um momento de análise, tendo alguns alunos recorrido à *applet* do GeoGebra para explorar o comportamento da função f em torno de $x_0 = 2$, Maria pediu a palavra e com convicção afirmou: “Sim! Porque seja por um lado ou pelo outro (indicando com gestos) a função nunca poderá ultrapassar $L = 4$!”. O professor relembrou os estudantes de que o limite é um “valor fixo” que indica a “convergência” das imagens da função à medida que $x \to x_0$ e, portanto, alcançado pela função.

A conceção sobre esse aspeto do conceito de limite foi novamente analisada na tarefa T_5, em que os estudantes realizaram explorações numa *applets* do GeoGebra, que continha uma representação geométrica do $L = \lim_{x \to 2} f(x)$, cujos registos assentam nas simbologias de sua definição formal, para decidir se este limite é alcançado pela função (Q_6T_5). Os dados revelam que apenas o par Eliseu e Vítor apresentou conceitos imagem associado ao significado do limite *como resultado de um processo de aproximação inalcançável da* $f(x)$, *quando* $L \neq f(x_0)$, para justificar incorretamente que o limite não é alcançado, tal como se observa na sua resposta à Q_6T_5 “Não, pois neste ponto $x = 2$, a função existe, mas é indefinido”. Esse significado de limite é gerado por *conflito cognitivo* caracterizado pelo significado do limite como a *imagem do ponto através da função* ser mobilizado num contexto em que $L \neq f(x_0)$, para decidir se o limite é ou não alcançado pela função.

Os demais oito grupos (sete pares e um trio) de estudantes responderam corretamente que o limite é alcançado pela função. O par Fátima e Miriam que respondeu: “Sim, porque ao aproximar-se x de x_0, o valor 4 nunca é ultrapassado” revela ter atribuído ao limite o significado do *resultado do processo de aproximação convergente ao objeto*, pois justifica que o limite ($L = 4$) nunca será ultrapassado pela aproximação das imagens $f(x)$ quando $x \to x_0$. Cinco desses grupos apresentaram *conceitos imagens* corretos associados ao significado do limite ser alcançado pela função como *resultado da existência de limite.* Para estes estudantes, se o limite existe então consequentemente será alcançado pela função, conforme verifica-se na resposta de Gil e Maria: “Sim, pois para o limite ser alcançado basta que ele exista e na questão 5 observamos que existe o limite”. Os demais dois pares de estudantes parecem não ter atribuído significado ao limite como forma de concluir se este é alcançado pela função. Estes estudantes apresentaram explicações indicativas de memorização do limite ser alcançado pela função, pois suas respostas apresentam afirmações concisas e sem nenhuma justificativa, tal como na resposta de Clara e Haziel: “Alcança”.

Desta forma, apesar da generalidade dos pares de estudantes ter respondido corretamente que o limite é alcançado pela função, é possível concluir que a conceção desse aspeto do conceito de limite ainda não foi totalmente consolidada pelos estudantes. Isto porque suas justificativas ainda residem, em sua maioria, na *existência do limite* ao invés da *convergência das imagens* $f(x)$ ao limite. Por este motivo, a análise da Q_6T_5 foi incluída pelo professor na discussão coletiva desta tarefa, o qual conduziu este momento com questionamentos que visavam levar os estudantes à consolidação da compreensão de que o limite é alcançado pela função. O professor exemplificou no quadro negro a representação geométrica do limite, expresso algebricamente por $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que se $x \in D\ e\ |x-2| < \delta$ então $|f(x)-4| < \varepsilon$ (figura 7.1.10) e perguntou aos estudantes: O $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ existe? Todos responderam que sim, pelo que lhes questionou: O limite é alcançado pela função? A grande maioria respondeu. Sim! Embora Eliseu e Vítor tenham dito que não.

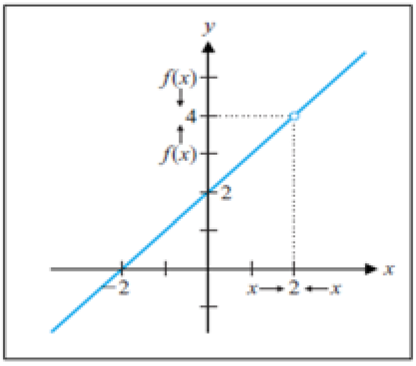


Figura 7.1.10 – Representação Geométrica do $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$

Foi então que o professor recorreu a análise da representação geométrica do limite, com os estudantes para explicar o limite como resultado do comportamento das imagens $f(x)$ quando x se aproxima de um ponto de abscissa x_0, utilizando argumentos com base na correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança e questionou-lhes:

Professor: A função vai ultrapassar o $f(x) = 4$?

Estudantes: Não!

Professor: Então, isso [$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$] significa que, dado um comando para o x [$x \to 2$], a função responderá várias imagens $f(x) = 3{,}9;\ 3{,}99;\ 3{,}999;$ e assim por diante, para $x < 2$ ou $f(x) = 4{,}1; 4{,}1; 4{,}001;$ [...], para $x > 2$. Ou seja, as imagens da função, por cima [$f(x) > 4$] e por baixo [$f(x) < 4$] vão tender ao $f(x) = 4$. Assim, se a função f vier por cima, ultrapassará o 4? [Estudantes: Não!]. E se ela vier por baixo, ultrapassará o 4? [Estudantes: Não!]. Aí eu pergunto: Qual é o direcionamento que as imagens $f(x)$ da função f estão tomando?

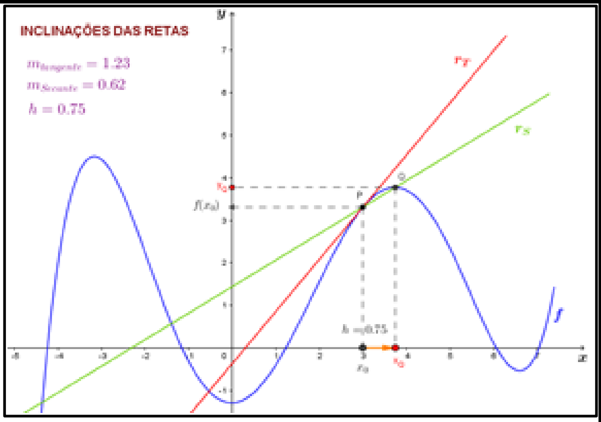
Estudantes: É o 4.

O professor então explicou que era impossível as imagens da função f convergirem para $f(x) = 4$ e, para algum $x \in V_\delta(2)$, $f(x)$ "pular fora de $V_\varepsilon(4)$"[$f(x) \notin V_\varepsilon(4)$], por exemplo, $f(x) = 5$, uma vez que a existência e unicidade do limite era garantida. Finalizou esclarecendo que o limite (L)) ser alcançado pela função é o mesmo que as imagens $f(x)$ da função convergirem para um valor L, não sendo possível que as imagens $f(x)$ "fujam" desta convergência ou "saltem fora" da vizinhança que o contém.

Esta conceção sobre o limite ser ou não alcançado pela função foi novamente analisada na tarefa T_{12}, tendo os estudantes realizado explorações em *applets* do GeoGebra que continha uma simulação geométrica (com animações) da reta tangente (r_T) ao gráfico de uma função f num ponto x_0 obtido pela aproximação de reta secante $\overrightarrow{PQ}$, com $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ ao gráfico de f – com indicações de seus respetivos declives m_T e m_S – para decidir e justificar se m_T é alcançado pela aproximação de m_S.

Os resultados indicam que todos os oito pares dos estudantes e Clara, que resolveu a tarefa individualmente, justificaram corretamente que o declive da reta tangente (o limite) é alcançado pela aproximação do declive da reta secante, ao responderem a $Q_7\ T_{12}$. Para além disso, verifica-se que explorações de arrastamento do seletor x_Q e do ponto $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$, simultaneamente correlacionado às representações numérica e geométrica de m_S, fazendo-o aproximar-se de $P = (x_0, f(x_0))$ correlacionado às representações numérica e geométrica de m_T, parece ter favorecido o desenvolvimento de conceitos imagem corretos do limite associado a um *valor que revela sua existência* ou como *resultado de um processo de aproximação convergente ao objeto* para decidir se o limite é alcançado pela função, sendo estes significados representativo de todos os pares de estudantes na resolução dessa questão.

Tal como exemplificado pelo diálogo do par Eliseu e Vítor, durante a resolução e resposta Q_7T_{12} (figura 7.1.11), as explorações na *applet* do GeoGebra que produziram efeitos visuais da inexistência do segmento h (Q $\rightarrow P$), da igualdade dos declives das retas secante e tangente ($m_S = m_T$) e de seus coincidentes gráficos, parecem ter possibilitado cinco pares dos estudantes e Clara a desenvolverem significado correto do limite ser alcançado como *valor que revela sua existência,* ao decidir se o limite é alcançado pela função. Neste contexto, a existência do limite é determinada pela igualdade entre os declives da secante e tangente (limite).



Eliseu: Volta lá, clica pela direita de novo [Vítor arrasta o seletor x_Q de modo que $h \to 0^+$]. A declividade da secante vai ser igual a da tangente quando o h for igual a zero. [visualiza na *applet* a secante coincidindo com a tangente] […] Ou seja este h aqui some [indica $h = \varepsilon$ na *applet*].

Vítor: Vai ser então $\frac{f(x_0)}{x_0}$ porque é um ponto único! $\left[\text{indica } m_T = \frac{f(x_0)}{x_0}\right]$.

Eliseu: Porque na verdade, se eu aumentar aqui o h [arrasta x_Q] – olha lá a secante e a tangente – vou começar por variar a secante [visualização dinâmica de $r_S \to r_T$ na *applet*]. No ponto que ela tá, se aqui é zero [indica segmento h ‘nulo’ na *applet*], olha lá, a tangente e a secante são iguais [r_S convergindo para r_T]. Os coeficientes delas são iguais [$m_S = m_T$ em valores numéricos].

Q_7T_{12}: Quando esse valor existe, o declive da reta tangente é alcançado pela aproximação dos declives da reta secante? Por quê?

Sim, porque o declive tanto da secante quanto da tangente são iguais e h tende a zero.

Figura 7.1.11 – Diálogo, exploração no GeoGebra e resposta de Eliseu e Vítor à Q_7T_{12}

No diálogo, torna evidente que Eliseu e Vítor realizaram juntos explorações na *applet* para decidir se o declive da reta tangente (limite) é alcançado pelas aproximações dos declives da reta secante. Arrastam o seletor x_Q de modo que $h \to 0$ e visualizam no gráfico da função f que as retas secante e tangente coincidem. Os excertos “se aqui é zero [indica segmento h ‘nulo’ na *applet*] olha lá, a tangente e a secante são iguais [r_S convergindo para r_T]” e “Os coeficientes delas são iguais” [$m_S = m_T$ em valores numéricos], revelam que os efeitos visuais dessas explorações, associados à igualdade dos valores numéricos dos declives das retas secante e tangente, na *applet* do GeoGebra, proporcionou este par de estudante a concluir corretamente que declive da reta tangente (o limite) é alcançado pela aproximação dos declives das retas secantes, com base na existência do limite $m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, pois a igualdade entre os declives dessas retas ($m_S = m_T$) é a base da sua conclusão, ao responder “Sim, porque o declive tanto da secante quanto da tangente são iguais e h tende a zero” Q_7T_{12}.

Também se verifica que as explorações do segmento $h = |x - x_0|$, cujos efeitos visuais se manifestam nas aproximações simultânea da reta secante à tangente, do ponto $Q \to P$ e em simulações de valores numéricos do declive m_S, comparável com m_T, parecem favorecido a conceção do limite ser alcançado pela função como *resultado de* *um processo de aproximação convergente ao objeto*, dos três pares restantes, conforme exemplificado no diálogo entre Gil e Maria durante a resolução da Q_7T_{12}.

> **Maria:** Agora vamos para a Q_7: "Quando esse valor existe, o declive da reta tangente é alcançado pela aproximação dos declives da reta secante?" [arrasta x_Q fazendo $h \to 0$] Sim.
>
> **Gil:** Sim! Porque a diferença entre os valores de m vai ser muito pequena [visualiza os valores de m_T e m_S na *applet*].
>
> **Maria:** vai ser tão pequena que torna insignificante. [...]
>
> **Gil:** Porque tá muito próximo de zero, o h é justamente isso. Olha ali [visualiza $h = \varepsilon$ na *applet*]. O h é epsilon.
>
> **Maria:** Sim, o h está tendendo a zero. Mas ele nunca vai ser igual a zero!
>
> **Gil:** Sim, porque a diferença entre os valores de m_T e m_S vai ser muito pequena.
>
> **Maria:** Que é praticamente desconsiderada.

Estes estudantes analisaram juntos suas explorações na *applet* do GeoGebra, que consistiu no arrastamento do seletor x_Q, abscissa do ponto Q, a fim de que $h \to 0$ ($h = \varepsilon$), a fim de responder a Q_7T_{12}. Os efeitos dessas explorações manifestadas pelas convergências do ponto $Q \to P$ e da reta $r_S \to r_T$, e a visualização comparativa dos valores numéricos dos declives m_S e m_T, permitiram-lhes concluir que a reta tangente é alcançada pela aproximação convergente da reta secante. Os excertos "Sim, porque a diferença entre os valores de m_T e m_S vai ser muito pequena" (Gil) e "Que é praticamente desconsiderada" (Maria) revelam que processo de aproximação da reta secante à reta tangente, associada a ínfima e desprezível diferença entre os seus declives ($|m_T - m_S| \to 0$) é a base de sua conclusão sobre aproximação convergente das reta secante à reta tangente.

7.1.3. O comportamento assintótico de uma função

No estudo do comportamento assintótico da função (vertical e horizontal) como implicação geométrica da existência de limite infinito e de limite no infinito, verifica-se que a generalidade dos estudantes desenvolveu conceitos imagem que atribuem a esses limites significados corretos associados, nomeadamente, *a condição de existência de assíntota vertical ao gráfico da função* (limite infinito) e *a condição de existência de assíntota horizontal ao gráfico da função* (limite no infinito). Esta conclusão é baseada na análise das resoluções das questões Q_5T_7, em que os estudantes foram questionados a explicarem o que é possível garantir como implicação geométrica do resultado $\frac{k}{0}$ no cálculo algébrico de limite de uma função racional, e da questão Q_4T_9, em que foram desafiados a representar algebricamente as condições de existência de uma assíntota horizontal.

Nas $(Q_4$ e $Q_5)T_7$, após os estudantes terem realizado explorações e simulações no gráfico de uma função racional – numa *applet* do GeoGebra – verifica-se que seis dos oito pares de estudantes atribuíram corretamente significado ao limite infinito associado à *condição de existência de assíntota vertical ao gráfico da função*, ao reconhecer e justificar que o resultado $\frac{\mathrm{k}}{0}$ no cálculo algébrico do $\lim_{x \to x_0} f(x)$, onde f é uma função racional, determina um limite infinito. Ademais, evidencia-se que explorações dinâmicas de pontos $(x, f(x))$ e a visualização de seus efeitos no gráfico de uma função racional f, nomeadamente, $x \to x_0^+$ e $x \to x_0^-$, $f(x) \to \infty$ ou $f(x) \to -\infty$ e o registo geométrico da assíntota vertical em pontos x_0, possibilitou os estudantes reconhecerem que o $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \frac{k}{0} = \pm\infty$ e/ou $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \frac{k}{0} = \pm\infty$ determina geometricamente a assíntota vertical ao gráfico de da função f em x_0, tal como exemplificado no diálogo de Fátima e Miriam durante a resolução da Q_5T_7 (figura 7.1.12).

Fátima: [clica na caixa 'reta vertical' na *applet* e lê a Q_5T_7]. Está vendo isso aqui? [mostra na *applet* $f(x) \to \infty$] É a mesma coisa que isso aqui [mostra na folha de resoluções o $\lim_{x \to 3} \frac{4}{0} = \infty$]

Miriam: Então, ele está perguntando o que a gente conclui quando cai nisso aqui, num número sobre zero? [refere-se a $\lim_{x \to x_0} \frac{k}{0}$]. Que vai ter uma assíntota e a função vai ao infinito. Certo?

Fátima: Sim. Vai tender ao infinito nos pontos em que dá zero no denominador. Foi no ponto $x = 1$ e no ponto $x = 3$.

Miriam: Vai tender ao infinito quanto tiver um número k sobre zero, certo? Vê, a $f(x)$ descendo e $f(x)$ subindo, ali óhhh [mostra $f(x) \to \infty$ e $f(x) \to \infty$ ao arrastar x].

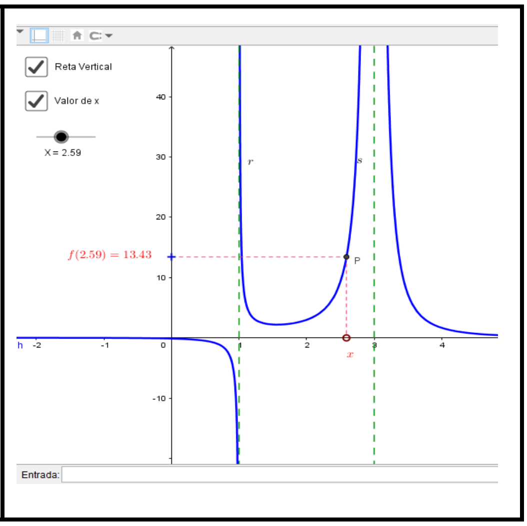


Figura 7.1.12 – Diálogo e exploração no GeoGebra de Fátima e Miriam à Q_5T_7

No diálogo, verifica-se que as explorações realizadas no GeoGebra permitiram a estes estudantes desenvolverem conceitos imagem do $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \frac{k}{0} = \pm\infty$ ou $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \frac{k}{0} = \pm\infty$ associado à existência de assíntota vertical ao gráfico de uma função, pois arrastam o seletor x na *applet*, de forma a que $x \to 1$ e $x \to 3$, visualizam o comportamento de $f(x)$, com $f(x) \to \infty$ e $f(x) \to -\infty$ e concluem: “vai ter uma assíntota e a função vai ao infinito”(Miriam) e “Vai tender ao infinito nos pontos em que dá zero no denominador”(Fátima). Esses conceitos imagem correto do limite infinito possibilitou-lhes reconhecer a assíntota vertical ao gráfico da função f no ponto x_0 como implicação geométrica do limite infinito $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \frac{k}{0} = \pm\infty$, e responder corretamente as questões $(Q_4 \; e \; Q_5)T_7$ (figura 7.1.13)

Q_4T_7: Considerando $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ uma função racional, o que se pode concluir sobre a existência $\lim_{x \to x_0} f(x)$ quando, ao aplicar procedimentos algébricos para calculá-lo, obtiver como resultado $\frac{k}{0}$, $k \in \mathbb{R}^*$ $\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{k}{0}\right)$?

Que a função tende ao infinito nos pontos x_0, desde que esses valores de x_0 ao serem substituídos na $f(x)$ terão como resultado $\frac{k}{0}$.

Q_5T_7: O que é possível garantir geometricamente, em relação à função, como consequência desse limite?

Existirá as assíntotas na função.

Figura 7.1.13 –Resposta de Fátima e Miriam às $(Q_4 \; e \; Q_5)T_7$

Os outros dois pares que responderam às questões $(Q_4 \; e \; Q_5)T_7$ revelam não terem atribuído significado do limite infinito. Estes estudantes apresentaram explicações incompletas, e até incoerentes, revelando dificuldades na compreensão desse conceito, tal como se observa nas respostas do par Clara e Haziel: “Não é possível encontrar o limite por meio algébrico”, na $Q_4 \; T_7$, e “Existirá algum limite tendendo ao infinito”, na Q_5T_7, que revela que não foi capaz de concluir e justificar que o resultado $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \frac{k}{0} = \pm\infty$ determina um limite infinito e relacioná-lo à existência de assíntota vertical ao gráfico da função no ponto $x = x_0$.

Na Q_4T_9, após os estudantes terem explorado o limite no infinito representado geometricamente – numa *applet* do GeoGebra – todos os 8 pares e Haziel e Talita (que resolveram individualmente) apresentaram conceitos imagem corretos do significado de limite no infinito associado à *condição de existência de assíntota horizontal ao gráfico da função* para representar simbolicamente (algébrica) as condições que geram o comportamento assintótico horizontal da função. Saliento, ainda, que explorações dinâmicas de pontos $(x, f(x))$ e a visualização dos seus efeitos no gráfico de funções f, nomeadamente, $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$, com $f(x) \to L$ e o registo geométrico da assíntota horizontal em pontos $y = L$, parecem ter possibilitado o desenvolvimento da referido significado do limite no infinito por parte desses grupos de estudantes, tal como exemplificado no diálogo entre Gil e Maria, na resolução das $(Q_3$ e $Q_4)T_9$ (figura 7.1.14).

Maria: Está aqui a reta [clica na caixa de comando para exibir reta horizontal na *applet* $AH1$]. Se você pegar um ponto aqui no intervalo daqui até aqui [arrasta x fazendo $x \to \infty$], o limite da função não é este? [mostra na applet $f(x) \to 2$]

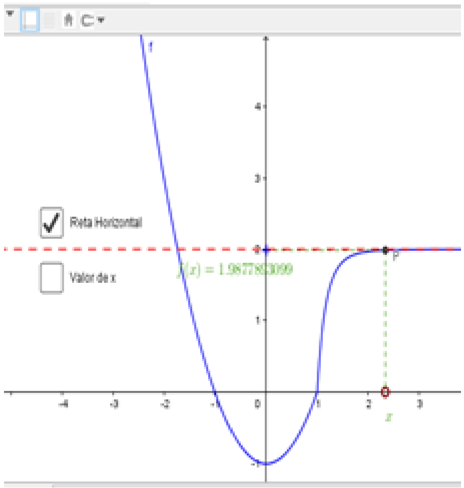
Gil: Sim.

Maria: A reta horizontal não vai passar por aqui, [indica $y = 2$] em que o limite infinito da função é este? [indica $f(x) \to 2$ e o associa ao $\lim_{x\to\infty} f(x)$]

Gil: Sim. A assíntota horizontal só existe quando x tende a infinito.

Maria: Quando x tende a infinito! Uma reta horizontal imaginária que passa por um ponto que é o limite quando x tende a infinito.

Gil: Pode ser isso. Coloca então simbolicamente $x \to \infty$ e $x \to -\infty$.



Q_3T_9: Com base no trabalho realizado nas questões anteriores, explique o que entende por reta Assíntota Horizontal ao gráfico de uma função f?

É uma reta horizontal imaginária que passa por um ou ambos os limites laterais da f(x). quando x tende ao infinito.

Q_4T_9: Como poderá representar, através de uma expressão simbólica, as condições que devem ser satisfeitas para que uma função f tenha uma Assíntota Horizontal?

$x \to \infty$ e $x \to -\infty$

Figura 7.1.14 – Diálogo, exploração no GeoGebra e resposta de Gil e Maria às $(Q_3$ e $Q_4)T_9$

No diálogo, verifica-se que este par de estudantes recorre à *applet* $AH1$ do GeoGebra, clicando na caixa de comando que exibe a reta horizontal $y = 2$ no gráfico de uma função f, fazendo $x \to \infty$ e visualizando $f(x) \to 2$, de modo a analisar o comportamento das imagens $f(x)$. Estas explorações permitiram-lhe reconhecer que a assíntota horizontal está associada a existência do $\lim_{x\to\infty} f(x)$, pois Maria conclui: “reta horizontal não vai passar por aqui, [indica $y = 2$] em que o limite infinito da função é este?”, sendo acompanhada por Gil na sua conclusão quando afirma que “sim. A assíntota horizontal só existe quando x tende a infinito”. Embora apresentem como resposta à Q_4T_9 um registo algébrico incompleto das condições de existência de uma assíntota horizontal, pois indicam apenas $x \to \infty$ e $x \to -\infty$, suprimindo $f(x) \to L$, o excerto “passa por um ou ambos limites laterais… quando x tende a infinito” (Q_3T_9) revela conceitos imagem corretos desses estudantes sobre o limite no infinito, caracterizado por relacionar o limite no infinito à assíntota horizontal ao gráfico da função.

7.1.4. A taxa variação instantânea de uma função

Finalmente, o significado que os estudantes atribuem à taxa de variação instantânea de uma função $\left(\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$ foi evidenciado na tarefa T_{14}, em que realizaram explorações de arrastamento do seletor x, numa *applet* do GeoGebra, que produzia deslocamento do ponto $P = (x, V(x))$ no gráfico da função V e do registo geométrico da reta tangente ao gráfico de V em P, a fim de representar algebricamente o declive dessa reta tangente quando este ponto atinge o máximo da função V $(Q_{8.a)}T_{14})$. Ao responderem esta questão da tarefa T_{14}, verifica-se que todos os estudantes apresentaram conceitos imagem corretos da taxa de variação instantânea associada ao *declive da reta tangente ao gráfico da função*, para expressar o declive da reta tangente ao gráfico de V, no seu ponto máximo, por $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$, tal como exemplificado no diálogo entre Fátima e Miriam (figura 7.1.15).

Miriam: [lê a $Q_8.a$] Ele quer agora algebricamente, como sempre né?

Fátima. Por ela ser paralela ao eixo x sua inclinação é zero. Você substitui zero no valor de m_T. [faz $m_T = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$].

Miriam: Vamos fazer então $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$ [escreve a resposta de $Q_{8.a)}$].

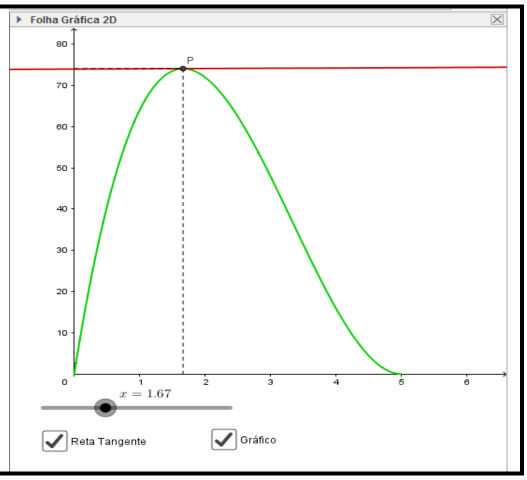


Figura 7.1.15 – Diálogo, exploração no GeoGebra e resposta de Fátima e Miriam à $Q_{8.a)}$

Esse par de estudantes reconheceu que a reta tangente no ponto máximo possui declive nulo e associou-o à taxa de variação instantânea da função no ponto, expressando-o por $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$, tal como se confirma no excerto “Por ela ser paralela ao eixo x sua inclinação é zero” e “Vamos fazer então $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$”, evidenciando assim ter atribuído significado correto do $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ associado ao declive da reta tangente ao gráfico da função.

7.1.5. Síntese

Em síntese, a análise dos dados permite caracterizar os significados atribuídos pelos estudantes ao conceito de limite, resultado dos seus conceitos imagem evocados para decidir, representar ou justificar sobre a sua existência, quando usam diferentes representações (algébrica e geométrica) com registos informais ou formais, ou ainda, interpretar se o limite é alcançado pela função. Estes significados revelam a conceção dos estudantes sobre quatro aspetos associados ao conceito de limite, nomeadamente, a existência do limite, o limite ser alcançado pela função, o comportamento assintótico da função e a taxa de variação instantânea.

Da análise dos dados é possível inferir que o significado do limite como *resultado de um processo de aproximação ao objeto* $(x \to x_0 \ \Rightarrow f(x) \to L)$ é apresentado pelos estudantes com mais frequência na conclusão e justificação da existência de limite. Ao que parece, as constantes explorações realizadas pelos estudantes das noções intuitivas de aproximações simultâneas $x \to x_0$ e $f(x) \to L$, nas tarefas com recurso a *applets* do GeoGebra que permitiam a visualização do comportamento dinâmico das imagens $f(x)$ em torno de $x = x_0$, permitiu-lhes frequentemente apresentar conceitos imagem do limite como resultado da implicação $x \to x_0 \ \Rightarrow f(x) \to L$ para explicar sobre a (in)existência do limite no ponto, favorecendo assim o reconhecimento do $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

Quando realizam procedimentos algébricos de cálculo do limite para analisar a sua existência, é comum apresentarem conceitos imagem do significado do limite como *resultado da igualdade dos limites laterais*. Este significado do limite mostrou-se importante para a consolidação da condição de existência do limite no ponto (igualdade dos limites laterais), favorecendo o reconhecimento algébrico e geométrico desse limite.

O significado de limite como *resultado de correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança*, é fundamentalmente utilizado para justificar o conceito de limite representado algébrica ou geometricamente, com registos assentes na expressão algébrica de sua definição formal. Evidencia-se que as interações dos estudantes com esses registos favorecem uma conceção mais formal do conceito de limite, uma vez que, para analisar a sua existência os estudantes associam as noções informais das aproximações simultâneas $x \to x_0$ e $f(x) \to L$ às noções formais assentes na noção de vizinhanças $x \in V_\delta(x_0)$ e $f(x) \in V_\varepsilon(L)$. Ademais, aponto que a generalidade dos estudantes foi capaz de mobilizá-lo para interpretar corretamente expressões algébricas que definem formalmente o limite infinito (Q_1T_8) e representar corretamente o limite no infinito na sua definição formal (Q_7T_{11}), indicando assim que este significado do conceito de limite consolidou-se no *conceito-imagem* desses estudantes.

Relativamente à questão do limite ser alcançado ou não pela função, os resultados indicam que a conceção sobre esse aspeto do conceito de limite não foi totalmente consolidada pelos estudantes. No início do estudo do conceito de limite os dados revelaram que o significado do limite como *a imagem do ponto através da função*, constitui um conflito cognitivo à conceção correta desse aspeto do conceito de limite, pois, ao ser mobilizado pelos estudantes para decidir se o limite é alcançado pela função, num contexto em que $f(x_0)$ não está definida ($\nexists\, f(x_0)$), geram conceitos imagem do significado do limite como *resultado de um processo de aproximação inalcançável da* $f(x)$*, quando* $L \neq f(x_0)$. Ademais, no final da intervenção didática, embora a totalidade dos estudantes revele reconhecer que o limite é alcançado pela função, a sua maioria justifica com base na existência do limite e não na convergência das imagens $f(x)$ ao limite, conforme apresentado pela minoria.

Também se observa que os estudantes apresentam significados corretos do limite infinito associado à *condição de existência de assíntota vertical ao gráfico da função* e do limite no infinito associado à *condição de existência de assíntota horizontal ao gráfico da função*, para analisar o comportamento assintótico da função (vertical e horizontal). Estes significados corretos do conceito de limite, possibilitaram a generalidade dos estudantes reconhecer a assíntota vertical como implicação geométrica do resultado $\frac{k}{0}$ no cálculo algébrico de limite de uma função racional (Q_5T_7), e reconhecer o limite no infinito como condição de existência de uma assíntota horizontal e representá-lo algebricamente (Q_4T_9).

Por fim, os estudantes revelam significados corretos da taxa de variação instantânea de uma função $\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$ associada ao *declive da reta tangente ao gráfico da função*, o qual possibilitou-lhes reconhecer o valor do declive da reta tangente ao gráfico de uma função no seu ponto máximo e representá-lo algebricamente ($Q_{8.a)}T_{14}$).

Desta forma, a diversidade de significados corretos que a generalidade dos estudantes atribui ao conceito de limite e que emergem dos seus *conceito-imagem,* revela uma conceção adequada sobre o conceito de limite, a qual passou a fazer parte do *conceito-imagem e conceito-definição* da generalidade dos estudantes. Os significados do limite como resultado de um processo de aproximação ao objeto, da igualdade dos limites laterais, de uma correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança, da existência de assíntota vertical ao gráfico da função, da existência de assíntota horizontal ao gráfico da função e do declive da reta tangente ao gráfico da função, foram importante para reconhecer ou representar o conceito de limite quando representado em diferentes representações (algébrica e geométrica), com registos assentes nas noções intuitivas das aproximações simultâneas ou das simbologias da sua definição formal. Já os significados do limite associado a um *valor que revela sua existência* ou ao *resultado de um processo de aproximação convergente ao objeto* foram essenciais para reconhecer que o limite é alcançado pela função.

Relativamente ao papel do GeoGebra na construção dos referidos significados do conceito de limite, verifica-se na análise apresentada, que as explorações de aproximações simultâneas $x \to x_0^-$, $x \to x_0^+$ e $f(x) \to L$ em gráficos de funções reais apresentadas em *applets* do GeoGebra, facilitaram o desenvolvimento de conceitos imagem corretos do conceito de limite associado ao *resultado de um processo de aproximação ao objeto e da igualdade dos limites laterais*, os quais possibilitou aos estudantes que manifestaram possuí-la, analisar e justificar corretamente a (in)existência de limite nas condições exploradas.

Também se observa que explorações em *applets* do GeoGebra que continham a representação geométrica do conceito de limite, com registos assentes na expressão algébrica da sua definição formal, nomeadamente, simulações das vizinhanças $V_\delta(x_0)$ e/ou $V_\varepsilon(L)$ a partir de modificações dos valores de seus raios (δ e ε), e dos pontos $(x, f(x))$ com $x \in V_\delta(x_0)$ ou $x > A$ e $f(x) \in V_\varepsilon(L)$, tenham favorecido o desenvolvimento de conceitos imagem, pelos estudantes, do limite no ponto em termos das noções de vizinhanças $x \in V_\delta(x_0)$ e $f(x) \in V_\varepsilon(L)$ e do limite no infinito com base na implicação $x > A \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

Além disso, aponto que explorações dinâmicas de pontos $(x, f(x))$ em gráficos de funções em *applets* do GeoGebra, nomeadamente, $x \to x_0^+$ e $x \to x_0^-$ e $f(x) \to \infty$ ou

$f(x) \to -\infty$) na tarefa T_7 e $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$, com $f(x) \to L$ na tarefa T_9, e a visualização de seus efeitos que indicam o comportamento das imagens $f(x)$ seguindo a direção de uma reta vertical em x_0 (na T_7) ou de uma reta horizontal passando pelo ponto $(0, L)$ (na T_9), favoreceram, respetivamente, o desenvolvimento de conceitos imagem corretos do limite infinito associado à *condição de existência de assíntota vertical ao gráfico da função* e do limite no infinito associado à *condição de existência de assíntota horizontal ao gráfico da função*. Esses conceitos imagem do conceito de limite possibilitaram a generalidade dos estudantes reconhecer que a implicação geométrica do resultado $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{k}{0}$, no cálculo algébrico de limite de uma função racional, corresponde a assíntota vertical ao gráfico da função de uma função f (Q_5T_7), e reconhecer que o limite no infinito é condição de existência da assíntota horizontal ao gráfico de uma função (Q_4T_9).

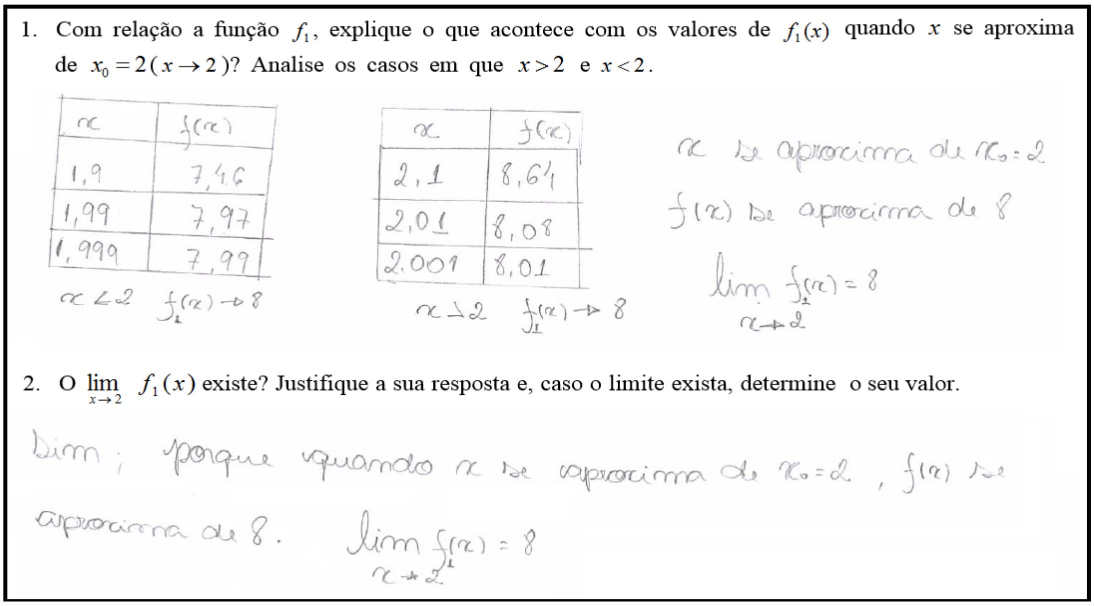
Por fim, as explorações em *applets* do GeoGebra que continham uma simulação geométrica (com animações) da reta tangente ao gráfico de uma função f num ponto $P(x_0, f(x_0))$, obtida pela aproximação da reta secante $\overrightarrow{PQ}$, com $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ ao gráfico de f (com indicações de seus respetivos declives m_T e m_S) revelam ter possibilitado atribuir significado às convergências $r_S \to r_T$ e $Q \to P$ ou da diferença desprezível entre os declives m_T e m_S ($|m_T - m_S| \to 0$), quando $h \to 0$. Estes significados viabilizaram conceitos imagens corretos do limite associado a um *valor que revela sua existência do limite* ou ao *resultado de processo de aproximação convergente ao objeto*, possibilitando aos estudantes justificarem corretamente que o limite no ponto é alcançado pela função (Q_7T_{12}).

7.2. O trabalho com as representações do conceito de limite

Esta componente da compreensão dos estudantes sobre o conceito de limite é analisada com base nas três ações associadas ao trabalho com as suas diferentes representações, nomeadamente, reconhecer, representar e converter (traduzir) o limite. Esta análise será centrada em aspetos que se constituem como objetivos de sua aprendizagem: (i) reconhecer o conceito de limite quando representado geometricamente, algebricamente por sua definição formal e no resultado do seu cálculo algébrico; (ii) representar geometricamente o conceito de limite ou algebricamente na sua definição formal; (iii) transformar geometricamente o limite, quando representado por sua definição formal e transformar algebricamente, para a taxa de variação instantânea, o declive da reta tangente ao gráfico de uma função no ponto representado geometricamente.

7.2.1. Reconhecer o limite em suas diferentes representações

A capacidade de reconhecer o limite em diferentes representações começa por ser analisada nas questões $(Q_1$ e $Q_2)T_1$ em que os estudantes interpretaram gráficos de funções reais f_k $(k = 1, 2, 3$ e $4)$, disponibilizadas em *applets* do GeoGebra, para decidir sobre a existência do limite em $x = 2$. Verifica-se que sete dos dez pares de estudantes reconheceram a (in)existência do $\lim_{x \to 2} f_k(x)$ nos gráficos das funções analisadas. Estes estudantes analisaram as aproximações simultâneas $x \to 2$ e $f_k(x) \to L$ nos gráficos das funções f_k para concluir sobre a (in)existência do limite, tendo recorrido à representação verbal para justificá-lo, algumas vezes complementada pela simbologia $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ e por registos numéricos apoiados em tabelas, conforme exemplificado nas respostas de Eliseu e Vítor quando justificam a existência do $\lim_{x \to 2} f_1(x)$ (figura 7.2.1).



1. Com relação a função f_1, explique o que acontece com os valores de $f_1(x)$ quando x se aproxima de $x_0 = 2\,(x \to 2)$? Analise os casos em que $x > 2$ e $x < 2$.

x	$f(x)$
1,9	7,46
1,99	7,97
1,999	7,99

$x < 2$ $f_1(x) \to 8$

x	$f(x)$
2,1	8,64
2,01	8,08
2,001	8,01

$x > 2$ $f_1(x) \to 8$

x se aproxima de $x_0 = 2$

$f(x)$ se aproxima de 8

$\lim_{x \to 2} f_1(x) = 8$

2. O $\lim_{x \to 2} f_1(x)$ existe? Justifique a sua resposta e, caso o limite exista, determine o seu valor.

Sim; porque quando x se aproxima de $x_0 = 2$, $f(x)$ se aproxima de 8. $\lim_{x \to 2} f_1(x) = 8$

Figura 7.2.1 – Extrato de respostas do par Eliseu e Vítor às $(Q_1$ e $Q_2)T_1$

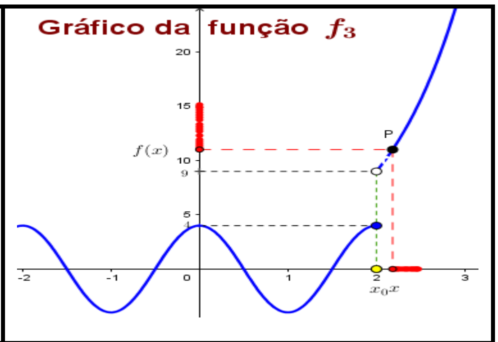
Este par de estudantes recorreu à representação tabular do limite para analisar as aproximações simultâneas $x \to 2$ e $f_1(x) \to L$, através das análises laterais $x \to 2^-$ e $x \to 2^+$, e certificar-se da existência do limite (Q_1T_1), pois conclui: "$\lim_{x \to 2} f_1(x) = 8$". Para justificá-la, recorre à linguagem verbal complementando-a com registos algébricos do limite, revelando assim, neste momento do estudo, ter sido capaz de utilizar e relacionar diferentes formas de representação do limite (verbal, tabular e algébrica) para concluir sobre sua existência.

Os demais três pares não conseguiram reconhecer a (in)existência do limite em todos os gráficos analisados. Estes pares apresentaram respostas incorretas do limite, com base na aproximação das imagens $f_k(x)$ à imagem do ponto x_0 pela função $\big(f(x) \to f(x_0)\big)$, e que revelam dificuldades em conceber a condição de sua existência. Seus erros consistiram em concluir: (i) a existência do limite (L) quando os seus limites laterais são diferentes $\left(\lim\limits_{x\to 2^-} f_k(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f_k(x)\right)$ na f_3 e (ii) a inexistência do limite (L) quando seus limites laterais são iguais na f_4, conforme exemplificado na resposta do par Cláudio e Pedro (f_3) e Clara e Haziel (f_4) (figura 7.2.2).

$\boldsymbol{Q_2T_1}$: O $\lim\limits_{x\to 2} f_3(x)$ existe? Justifique a sua resposta e, caso o limite exista, determine o seu valor.

$\boldsymbol{f_3}$: Possui limite <u>quando $x < x_0$</u> e <u>quando $x > x_0$</u> não possui limite. Limite para $x < x_0$ é igual $a\ 4 \Rightarrow f(x) = 4$

Resposta do par Cláudio e Pedro à Q_2T_1



$\boldsymbol{Q_2T_1}$: O $\lim\limits_{x\to 2} f_4(x)$ existe? Justifique a sua resposta e, caso o limite exista, determine o seu valor.

$\boldsymbol{f_4}$: Não existe o limite, pois <u>os valores $x < 2$ e $x > 2$ possuem imagem</u> e $f_4(x)$ é diferente do valor de $f_4(x_0)$.

Resposta do par Clara e Haziel à Q_2T_1

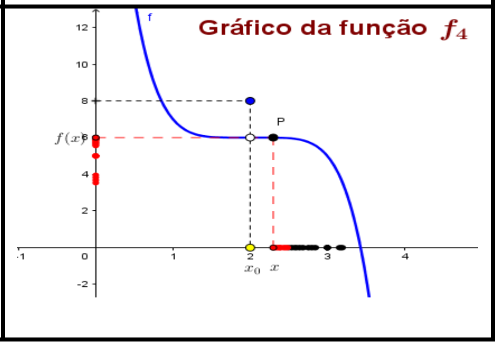


Figura 7.2.2 – Resposta apresentada por dois pares de estudantes à Q_2T_1

As expressões verbais sublinhadas nas respostas destes pares revelam que as aproximações simultâneas $x \to x_0$ e $f(x) \to f(x_0)$ constituem a base de suas análises para a conclusão sobre (in)existência do limite. O par Cláudio e Pedro conclui erradamente a existência do $\lim\limits_{x\to 2} f_3(x)$, baseando-se no facto do limite lateral esquerdo ser igual à imagem do ponto pela função $\left(\lim\limits_{x\to 2^-} f_3(x) = 4\right)$, não se apercebendo de que a condição de existência do limite não era satisfeita $\left(\lim\limits_{x\to 2^-} f_3(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f_3(x)\right)$. O par

Clara e Haziel, por sua vez, conclui que $\lim_{x \to 2} f_4(x)$ não existe pois os limites laterais são diferentes do valor da imagem de x_0, tal como se confirma no excerto "$f_4(x)$ é diferente do valor de $f_4(x_0)$)", revelando assim dificuldades em compreender que a igualdade dos limites laterais é a condição necessária para a existência $\lim_{x \to 2^-} f_4(x)$. Apesar de fazerem uso adequado da representação verbal para explicar a (in)existência do limite, esses dois pares não foram capazes de usar corretamente a condição de existência do limite, para reconhecer a (in)existência do $\lim_{x \to 2} f_k(x)$, representado geometricamente, nas condições apresentadas (f_3 e f_4).

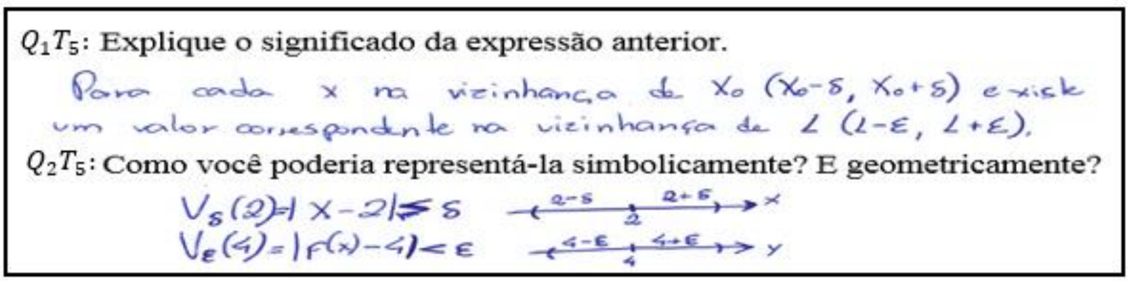
Já nas tarefas em que os estudantes interpretaram o $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ representado geometricamente numa *applet* do GeoGebra, com registos assentes nas aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to L$ (Q_2T_3) ou nas simbologias da sua definição formal (Q_5T_5), verifica-se que todos os estudantes demonstraram tê-lo reconhecido. Oito dos dez pares, na Q_2T_3 e seis dos nove grupos (8 pares e 1 trio) na Q_5T_5 recorreram à representação verbal, apresentando argumentos corretos sobre o limite e complementando-a com a simbologia $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ para justificar sua existência, conforme é exemplificado nas respostas de Gilberto e Edimar (Q_2T_3): "Sim. Quando x se aproxima de x_0 pela direita ou pela esquerda sua imagem tende a 4. $\mathrm{Lim}_{x \to 2} f(x) = 4$"; e de Fátima e Miriam (Q_5T_5): "Sim, $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$. *Quando* x tende a 2, $f(x)$ *tende a* 4". A combinação da linguagem verbal e de símbolos algébricos para descrever o limite evidencia um adequado registo de representação identificável do limite, apresentada por estes estudantes.

Os demais dois pares na Q_2T_3 e três pares na Q_5T_5, recorreram a representações algébricas do limite para justificar a sua existência, tal como exemplificado nas respostas de Eliseu e Vítor (Q_2T_3): "Sim, porque $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$ ou seja $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$", que recorreu à representação algébrica da igualdade dos limites laterais, e Miguel e Talita que justificaram a existência do limite representando-o pela expressão algébrica da sua definição formal: "Sim, $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ porque $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$ tal que $x \in D$ e $|x - 2| < \delta$ então $|f(x) - 4| < \varepsilon$". Desta forma, evidencia-se que esses estudantes apresentam uso adequado dos símbolos algébricos para descrever o $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

Nas questões Q_1T_5, Q_2T_{15} e Q_1T_8 os estudantes foram desafiados a reconhecer o conceito de limite quando representado algebricamente pela sua definição formal. Nessas questões, eram apresentados aos estudantes expressões algébricas baseadas na noção de vizinhanças, que se propõem definir formalmente o conceito de limite. Eles analisaram as desigualdades algébricas associadas à x_0 e/ou $f(x)$, os quantificadores e de sua ordem, na referida expressão algébrica e concluíram sobre a existência do limite no ponto ou limite infinito.

Nas Q_1T_5 e Q_2T_{15}, que focavam o reconhecimento do limite no ponto, verifica-se que oito dos nove grupos, na Q_1T_5, e todos os pares, na Q_2T_{15}, reconheceram que a expressão apresentada no enunciado "$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que $x\ \epsilon\ D$ e $|x-2| < \delta$ então $|f(x)-4| < \varepsilon$" traduzia o conceito de limite. Esses estudantes recorreram à representação verbal, apresentando explicações corretas das desigualdades $|x-2| < \delta$ e $|f(x)-4| < \varepsilon$ para traduzir o limite, complementando-a com a notação $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ para expressar o seu valor. Desta forma, evidenciam correta representação verbal da definição formal do limite, tal como se observa nas respostas de Adilson e Soares (Q_1T_5): "Significa que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ onde a expressão $|x-2| < \delta$ é a vizinhança em torno de x_0 e δ é o raio, e $|f(x)-4| < \varepsilon$ representa a vizinhança em torno de L e ε é o raio" e de Talita e Clara (Q_2T_{15}): *"A definição de limite é o significado da expressão anterior que relaciona a vizinhança em torno de x_0 e $f(x)$. Simbolicamente: $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$".*

Apenas o par Gil e Maria, na Q_1T_5, demonstrou não ter reconhecido o limite, a partir de sua definição formal. Esse par não apresentou nenhuma referência de que a expressão apresentada se tratava do $\lim_{x\to 2} f(x)$ (figura 7.2.3).


Q_1T_5: Explique o significado da expressão anterior.

Para cada x na vizinhança de X_0 $(X_0-\delta, X_0+\delta)$ existe um valor correspondente na vizinhança de L $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Q_2T_5: Como você poderia representá-la simbolicamente? E geometricamente?

$V_\delta(2) = |x-2| \leq \delta$

$V_\varepsilon(4) = |f(x)-4| < \varepsilon$

Figura 7.2.3 – Resposta do par Gil e Maria às questões à (Q_1 e Q_2)T_5

A sua resposta à questão Q_1T_5 evidencia que este par possui um conhecimento do significado das simbologias, $|x-2| < \delta$ e $|f(x)-4| < \varepsilon$ e da correspondência $x \in$

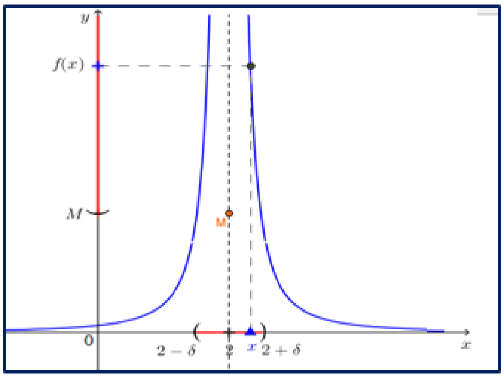
$V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$. No entanto, a falta de indicação dos valores de x_0 e L e da correspondência entre as vizinhanças $V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$, através da relação entre seus raios, δ e ε (questão Q_1) e de registos incorretos das representações algébrica e geométrica do limite (questão Q_2), revelam dificuldades no reconhecimento do limite.

Na Q_1T_8, os estudantes analisaram a expressão algébrica apresentada em cada um de seus 4 itens e identificaram àquela que corresponde a representação geométrica do limite no infinito, que continham registos baseados na expressão algébrica da sua definição formal. Verifica-se que todos os dez grupos reconheceram corretamente que a expressão $\forall\, M > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $|x - 2| < \delta$ então $f(x) > M$ (item **c)**) corresponde a definição formal do limite infinito, representado geometricamente. Estes estudantes foram capazes de associar o quantificador $\forall\, M > 0$ e o comportamento infinito das imagens $f(x)$, à desigualdade $f(x) > M$, e recorrer à representação verbal, dando explicações adequadas e elucidativas das simbologias $|x - 2| < \delta$ e $f(x) > M$ para justificar o limite no infinito, tal como se verifica na reposta do par Cláudio e Pedro e sua explicação ao professor sobre a Q_1T_8 (figura 7.2.4).

Pedro: Aqui para todo $M > 0$ indica que tá na parte superior do eixo y, positivo. $|x - 2| < \delta$ é a vizinhança em torno do $x_0 = 2$ de raio δ. Então $f(x)$ que está no eixo y é maior do que M. A gente escolheu o maior [indica $M > 0$] porque todos esses valores vão daqui para cima [indica $f(x) \to \infty$).

$\boldsymbol{Q_1T_8}$**:** Em qual das alternativas a seguir se apresenta a definição formal de $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$? Justifique o porquê de sua escolha.

c). Indica que existe uma vizinhança em torno x_0 de raio δ conforme o gráfico. Como $\forall\, M > 0$ estamos analisando os valores positivos de $f(x)$, com $f(x) > M$ engloba os valores maiores que M.



Representação geométrica de $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

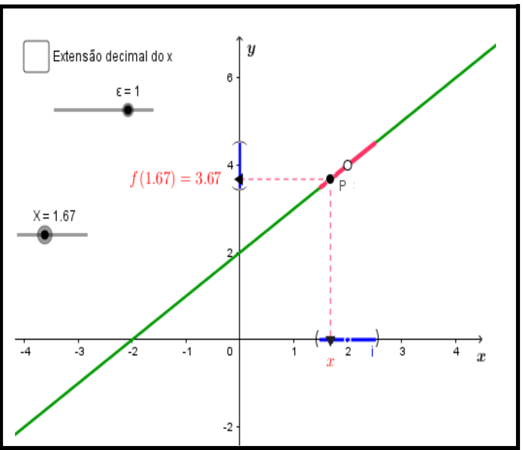
Figura 7.2.4 – Explicação e Resposta do par Cláudio e Pedro à Q_1T_8

As questões $(Q_2, Q_3$ e $Q_4)T_3$ e Q_4T_7, visavam verificar se os estudantes eram capazes de reconhecer o conceito de limite no resultado do seu cálculo algébrico. Nas questões $(Q_2, Q_3$ e $Q_4)T_3$ os estudantes deveriam reconhecer que o resultado algébrico $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \frac{0}{0}$ constituiu uma forma de indeterminação de limite, enquanto que as questões Q_4T_7 buscavam verificar se conseguiam reconhecer que o resultado algébrico $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{k}{0}$ determina um limite infinito.

Os dados revelam que apenas o par Adilson e Bruno não responderam as questões $(Q_4 - Q_8)T_3$. Os demais nove pares de estudantes revelaram terem conseguido calcular corretamente o $\lim_{x \to 2} f(x)$ e obter como resultado $\frac{0}{0}$, e concluir que a simbologia $\frac{0}{0}$ indicava que o limite não era possível ser determinado (Q_4T_3). Ademais, há evidência de que o reconhecimento de $\frac{0}{0}$ como uma forma indeterminada do limite tenha sido facilitada pelas explorações na *applet* do GeoGebra, caracterizada pela visualização da convergência das imagens de $f(x) \to L$ na representação geométrica do $\lim_{x \to 2} f(x)$, conforme se observa no diálogo do par Maria e Vera na resolução das questões $(Q_2, Q_3$ e $Q_4)T_3$ (figura 7.2.5).

Maria: Questão 2: Análise … [lê a Q_2T_3] O limite existe? [arrasta x e faz $x \to 2^+$ e $x \to 2^-$]. Sim. Podemos colocar que os limites laterais em x_0 seja pela esquerda ou pela direita tende a 4.

Vera: O comportamento lateral dos valores de x são os mesmos. [faz $x \to 2$ e visualiza $f(x) \to 4$]. O valor é 4 [escreve $\lim_{x \to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = 4$]. […]. Calcule o valor do $\lim_{x \to 2} f(x)$ … [lê o enunciado da Q_4]. Tem que substituir o $x = 2$. [Calcula $\lim_{x \to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$] Vai ficar $\frac{0}{0}$. Zero dividido por zero, não existe né?



Maria: Não existe, pois $0 \times 1 = 0$, $0 \times 2 = 0$, $0 \times 3 = 0$, então qualquer número vezes zero é zero. Então não tem como você dividir por zero.

Vera: Não é possível dividir por zero. Então o limite não existe ou não é possível determinar?

Maria: Não é possível determinar, por que a gente já viu que o limite é 4. Existe o limite só que não é possível determinar por esse meio de substituição.

Figura 7.2.5 – Diálogo e exploração no GeoGebra de Maria e Vera às $(Q_2, Q_3$ e $Q_4)T_3$

Estas estudantes evidenciam terem reconhecido a existência do $\lim_{x \to 2} f(x)$ a partir da das explorações que realizaram na *applet* do GeoGebra, pois arrastam o seletor x fazendo $x \to 2^+$ e $x \to 2^-$ e concluem “Sim, … seja pela esquerda ou pela direita tende a 4” (Maria) e “O valor é 4” (Vera). Para além disso, foram capazes de calcular corretamente o $\lim_{x \to 2} f(x)$ e obter como resultado $\frac{0}{0}$, apresentando correto *tratamento* no cálculo do limite. Ao decidirem que conclusão era possível extrair desse resultado (na Q_4T_3) – Se o limite não existe ou se não é possível determiná-lo – reconhecem a inexistência de fração quando o denominador é igual a zero e, uma vez que sua existência já tinha sido por elas confirmada, na Q_2T_3, concluem: "Não é possível determinar, porque a gente já viu que o limite é 4. Existe o limite só que não é possível determinar por esse meio de substituição". Esse relato evidencia que a conexão entre as representações algébrica e geométrica do $\lim_{x\to 2} f(x)$ na *applet* do GeoGebra, possibilitou esse par de estudante reconhecer que o $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{0}{0}$ constitui numa indeterminação do limite.

Na questão Q_4T_7, verifica-se que todos os nove pares e Talita, que resolveu individualmente, conseguiram reconhecer que o resultado do $\lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{k}{0}$, onde f é uma função racional, determina um limite infinito. Esses estudantes foram capazes associar o comportamento infinito das imagens $f(x)$ quando $x \to x_0^+$ e/ou $x \to x_0^-$ ao resultado $\frac{k}{0}$ do cálculo algébrico do limite para concluir que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$. Ademais, evidencia-se que as explorações de pontos $\big(x, f(x)\big)$ e a visualização de seus efeitos no gráfico de f, nomeadamente, $x \to x_0^+$ e $x \to x_0^-$, $f(x) \to \infty$ ou $f(x) \to -\infty$, e a conexão de registos algébricos e geométricos associados ao cálculo do limite infinito, possibilitaram os estudantes a reconhecerem que o $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \frac{k}{0} = \pm\infty$ e/ou $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \frac{k}{0} = \pm\infty$, como exemplificado no diálogo do par Cláudio e Pedro durante a resolução desta questão (figura 7.2.6).

Pedro: [faz na *applet* $x \to 1$ e $x \to 3$ e visualiza o comportamento de $f(x)$] Isso aqui é o limite, né? Mas não é definido [não é um valor]. Coloca ali quando x tende a 1 [faz $x \to 1$ e visualiza $f(x) \to \infty$ na *applet*]. Aqui o resultado deu $\frac{2}{0}$ que é o limite.

Cláudio: É verdade! Quando $x \to 1$, $f(x) \to \frac{2}{0}$. [...] Vai existir uma tendência ao infinito. Agora a questão 4

Pedro: [lê a Q_4T_7]. Vai existir um limite lateral tendendo ao infinito. Aqui tá tendendo para baixo, aqui, para cima e aqui os dois para cima [mostra na *applet* $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to 3^\pm} f(x) = \infty$].

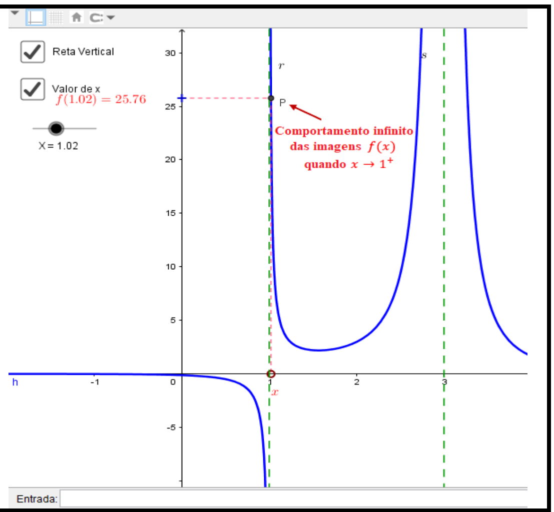


Figura 7.2.6 – Diálogo e exploração no GeoGebra de Cláudio e Pedro na resolução da Q_4T_7

No diálogo, verifica-se que as explorações realizadas no GeoGebra permitiram este par de estudantes reconhecer o comportamento infinito das imagens $f(x)$ quando $x \to 1$ e $x \to 3$, pois os estudantes arrastam o seletor x na *applet*, de forma a que $x \to 1$ e $x \to 3$, visualizam o comportamento de $f(x)$, com $f(x) \to \infty$ e $f(x) \to -\infty$ e concluem "Isso aqui é o limite, né? Mas não é definido" (Pedro) e "Vai existir uma tendência ao infinito" (Cláudio). A facilidade desses estudantes na interpretação e conexão dos registos algébricos (expressão algébrica do $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \frac{k}{0}$) e geométricos (comportamento de pontos $(x, f(x))$ no gráfico de f) associados ao limite no infinito, parece ter favorecido à correlação do limite infinito ao resultado $\frac{k}{0}$ do seu cálculo algébrico. Sob este ponto justifico que os estudantes recorrem à análise do comportamento de $f(x)$ na *applet* e ao cálculo algébrico de $\lim\limits_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \frac{k}{0}$ e $\lim\limits_{x \to 3^{\pm}} f(x) = \frac{k}{0}$, e concluem: "quando $x \to 1$, $f(x) \to \frac{2}{0}$. [...]" (Cláudio) e "vai existir um limite lateral tendendo ao infinito. Aqui tá tendendo para baixo, aqui, para cima e aqui os dois para cima [mostra na *applet* o $\lim\limits_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \pm\infty$] e $\lim\limits_{x \to 3^{\pm}} f(x) = \infty$]" (Pedro). Desta forma, esses estudantes revelam terem sido capazes de reconhecer que $\lim\limits_{x \to x_0^{+}} f(x) = \frac{k}{0} = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^{-}} f(x) = \frac{k}{0} = \pm\infty$ e responder corretamente à Q_4T_7 apresentando registo corretos das simbologias algébricas dos limites laterais infinitos (figura 7.2.7)

Q_4T_7: Considerando $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ uma função racional, o que se pode concluir sobre a existência $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ quando, ao aplicar procedimentos algébricos para calculá-lo, obtiver como resultado $\frac{k}{0}$, $k \in \mathbb{R}^*$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \frac{k}{0}\right)$?

vai existir um limite lateral tendendo ao infinito, podendo tender ao mesmo infinito.

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

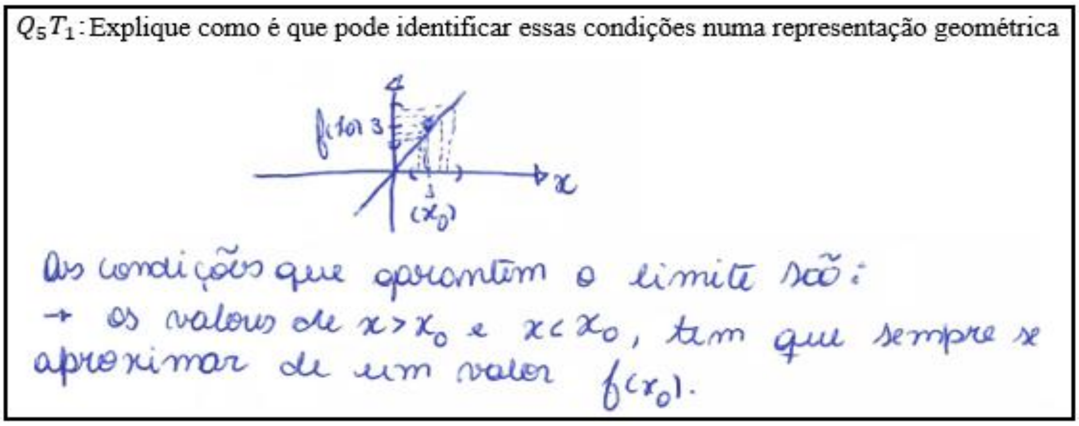
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Figura 7.2.7 –Resposta do par Cláudio e Pedro à Q_4T_7

7.2.2. Representar o limite em diferentes representações

A capacidade de os estudantes representarem o conceito de limite em diferentes representações é inicialmente analisada na questão Q_5T_1, tendo os estudantes previamente realizado explorações dinâmicas do gráfico de quatro funções representados em *applets* do GeoGebra, com vista ao reconhecimento da existência de $\lim_{x \to 2} f(x)$. Nessa questão os estudantes foram desafiados a deduzir os três possíveis casos da existência do limite no ponto $\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = L\right)$, nomeadamente, (i) $L = f(x_0)$; (ii) $L \neq f(x_0)$; ou (iii) o limite (L) existir e a função não estar definida em x_0 e a representá-los geometricamente.

Os dados revelam, que neste início da aprendizagem do conceito do limite, os estudantes não conseguiram, de forma autónoma, deduzir os três possíveis casos da existência do limite no ponto e representá-los geometricamente. Apenas três dos dez pares de estudantes conseguiram deduzir e representar geometricamente o caso em que o limite é igual a imagem de x_0 $(L = f(x_0))$. Estes pares indicaram no plano cartesiano o esboço do gráfico de uma função e, de forma elucidativa, o processo dinâmico das aproximações das imagens $f(x)$ ao limite, à medida que os valores das abscissas x tendem a x_0, evidenciando um adequado registo de representação geometrica do limite, tal como verificado na resposta do par Clara e Ismael (figura 7.2.8).


Q_5T_1: Explique como é que pode identificar essas condições numa representação geométrica

Os condições que apresentam o limite são:
→ os valores de $x > x_0$ e $x < x_0$, tem que sempre se aproximar de um valor $f(x_0)$.

Figura 7.2.8 – Resposta do par Clara e Ismael à Q_5T_1

Os sete pares restantes não apresentaram nenhum registo geométrico do limite. As respostas "através da análise da continuidade do gráfico" (Gil e Maria), "Graficamente" (Adilson e Vera), "através do gráfico da função" (Fátima e Miriam), "Aproximação do ponto x_0 do ponto x" (Cláudio e Pedro), por exemplo, evidenciam que estes estudantes, ou não compreenderam o enunciado da questão que exigia a representação geométrica do limite, ou apresentaram dificuldades no reconhecimento dos três casos de existência do limite, impedindo-os de os representar geometricamente.

Esses resultados iniciais indicavam a necessidade de o professor consolidar com os estudantes, no momento da discussão coletiva, o conhecimento sobre os três casos de existência do limite no ponto e sua representação geométrica. Nesse momento, o professor esboçou no quadro negro gráficos de funções que ilustravam os três possíveis casos do $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$, e questionou os estudantes sobre a existência do limite. Todos responderam que o $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe e indicaram corretamente o seu valor, respondendo comumente que quando x se aproxima de 2 a $f(x)$ se aproxima de 4. O professor explicou que esses gráficos exemplificavam as representações geométricas dos três possíveis casos da existência do $\lim_{x \to 2} f(x)$, e finalizou generalizando-os para $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Após essa experiência, os estudantes foram novamente desafiados a representar geometricamente o limite, na questão Q_2T_2. Todos os oito pares de estudantes, incluindo Talita e Cláudio que a resolveram individualmente, foram capazes de representar geometricamente o limite expresso pela simbologia $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$. Apenas Cláudio representou geometricamente os três casos de existência desse limite (figura 7.2.9).

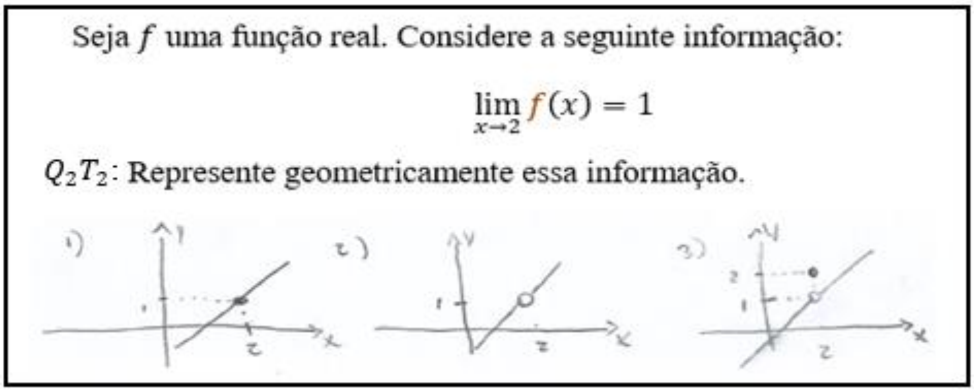


Figura 7.2.9 – Resposta de Cláudio na Q_2T_2

Embora a resposta desse estudante não apresente registos das aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to L$ como forma expressar o comportamento das imagens $f(x)$, o registo gráficos de três funções, contendo indicações da (i) continuidade em $x = 2$ ($L = f(x_0)$), (ii) descontinuidade em $x = 2$ por uma "bola aberta" ($\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ e $\nexists f(x_0)$) e (iii) descontinuidade em $x = 2$ mas com $f(2)$ definida ($L \neq f(x_0)$), permite concluir que este estudante apresentou registos elucidativos corretos da representação geométrica do limite associado aos três possíveis casos de sua existência.

Outros dois pares representaram geometricamente dois casos da existência do limite, nomeadamente, $L = f(x_0)$ e o limite (L) existe, mas função não está definida em x_0. Esses estudantes foram capazes de representar corretamente no esboço do gráfico das funções, as vizinhanças centradas nos pontos de abscissa $x_0 = 2$ e ordenada $f(x) = 1$, por meio de intervalos abertos, indicando através de setas as aproximações sucessivas $x \to x_0$ e $f(x) \to L$, apresentando corretos registos de representações geométricas do limite, como é possível verificar na resposta de Ismael e Pedro (figura 7.2.10).

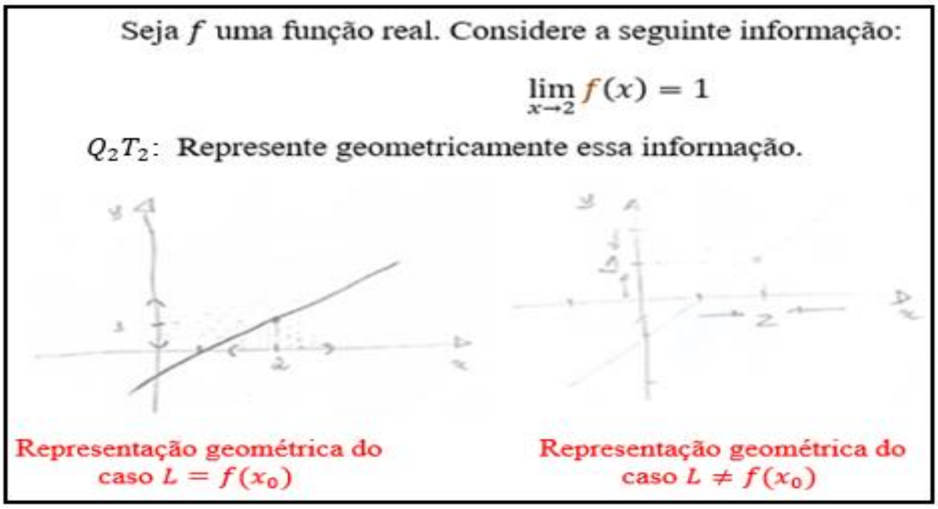


Figura 7.2.10 – Resposta do par Ismael e Pedro à Q_2T_2

Os demais seis pares de estudantes e Talita, representaram geometricamente o limite, quando este é igual a imagem do ponto pela função ($L = f(x_0)$). Destes estudantes, cinco pares e Talita foram capazes de apresentar uma representação geometrica do limite que continha o esboço correto do gráfico da função, indicando corretamente e de forma elucidativa as aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to f(x_0)$, quer por meio de intervalos abertos contendo o desenho de inúmeras imagens $f(x)$ se aproximando de $L = 1$, quer por meio da indicação de setas ou tabelas de valores numéricos, tal como é exemplificado na resposta da par Elias e Jorge (figura 7.2.11).

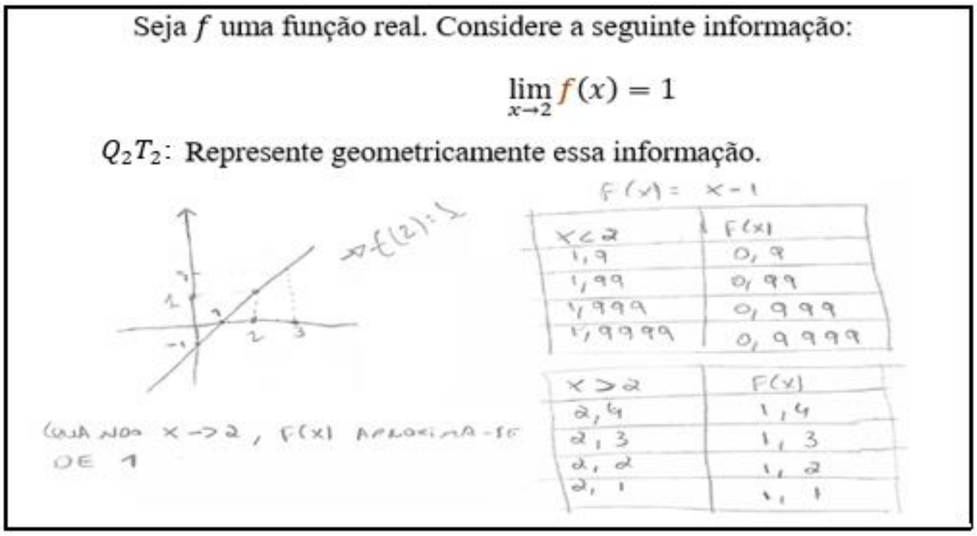
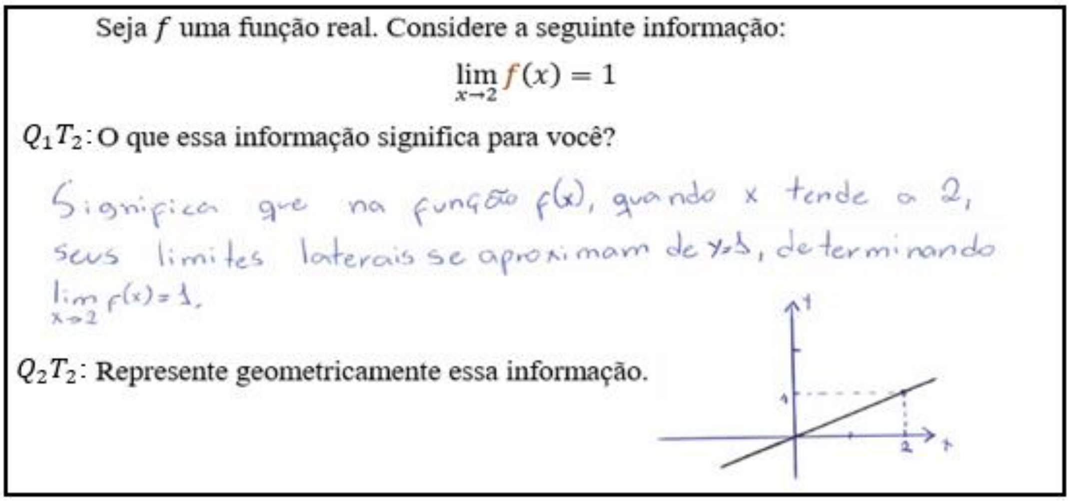


Figura 7.2.11 – Resposta do par Elias e Jorge à Q_2T_2

Estes estudantes apresentaram no plano cartesiano o esboço do gráfico de uma função, contendo indicações de $f(2) = 1$ e recorreram à representação numérica apoiada em tabelas e à representação verbal, para ressaltar, no gráfico, as aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to L$, ao invés de indicações por meio de setas ou intervalos, apresentando assim um correto *tratamento* da representação do geométrica do limite e correlacionada à outras formas de suas diferentes representações (verbal e tabular).

O par restante, Gil e Maria (figura 7.2.12), mobilizou conhecimento das aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to L$ para explicar verbalmente a interpretação que fazem do limite (Q_1T_2) e foi capaz de representar o esboço do gráfico de uma função como indicação da representação geométrica do limite ($L = f(x_0)$) (Q_2T_2). No entanto, a falta de indicação dessas aproximações no gráfico da função, quer por meio de intervalos abertos, esquemas elucidativos de movimentação de pontos $(x, f(x))$, ou por indicação de setas ou tabelas de valores numéricos, revelam falta de rigor matemático destes estudantes na transformação (*tratamento* e *conversão*) da representação geométrica do limite, necessária à compreensão deste objeto matemático.


Seja f uma função real. Considere a seguinte informação:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 1$$

Q_1T_2: O que essa informação significa para você?

Significa que na função $f(x)$, quando x tende a 2, seus limites laterais se aproximam de $y=1$, determinando $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$.

Q_2T_2: Represente geometricamente essa informação.

Figura 7.2.12 – Resposta do par Gil e Maria às questões $(Q_1$ e $Q_2)T_2$

Na Q_6T_7 os estudantes foram desafiados a representar geometricamente o limite infinito de uma função racional f. Verifica-se que seis dos nove pares de estudantes, foram capazes de apresentar as quatro possíveis representações geométrica do $\lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{k}{0}$. Esses estudantes apresentaram esboços de gráficos de funções racionais, contendo, de forma elucidativa, as convergências das imagens $f(x) \to \pm\infty$ à medida que $x \to x_0$, tal como se observa na resposta de Clara e Ismael (figura 7.2.13)

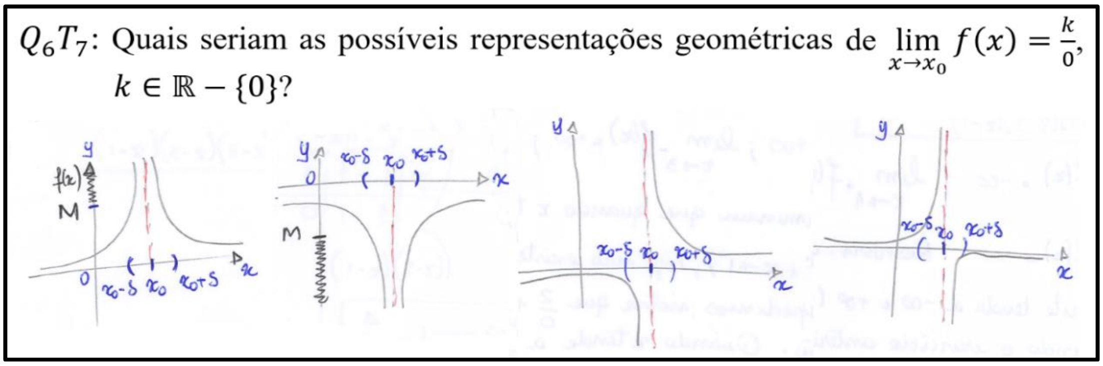

Q_6T_7: Quais seriam as possíveis representações geométricas de $\lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{k}{0}$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$?

Figura 7.2.13 – Resposta do par Cláudio e Pedro à Q_6T_7

Estes estudantes apresentaram no plano cartesiano os registos gráficos de quatro funções, contendo representações corretas das convergências $x \to x_0$ assentadas na noção de vizinhança $V_\delta(x_0)$, registos elucidativos de $f(x) \to \pm\infty$ no eixo das ordenadas ($f(x) > B$ ou $f(x) < B$) e registos de retas verticais tracejada passando por x_0 para indicar a implicação geométrica de $\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = \frac{k}{0}$ (assíntota vertical), os quais permite concluir foram capazes de apresentar correto *tratamento* da representação geométrica do limite infinito $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{k}{0}$.

Os demais três pares e Talita, não apresentaram registos corretos das quatro possíveis representações geométrica do $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{k}{0}$. Dois pares não apresentaram resposta à Q_6T_7 enquanto que Talita e o par Clara e Haziel apresentaram registos geométricos incompletos ou incorretos de gráficos de funções e/ou das variáveis do limite ($x \to x_0^{\pm}$ e $f(x) \to \pm\infty$), revelando dificuldades na construção de representação identificável do limite infinito, tal como exemplificado na resposta de Talita que resolveu individualmente esta tarefa (Figura 7.2.14).

Q_6T_7: Quais seriam as possíveis representações geométricas de $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{k}{0}$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$?

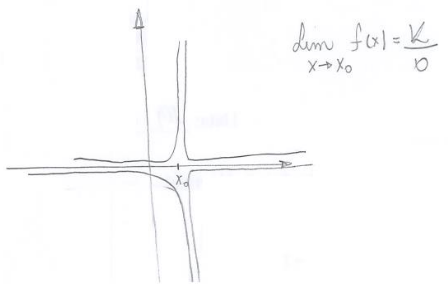


Figura 7.2.14 – Resposta de Talita à questão Q_6T_7

Já na Q_5T_9, em que os estudantes realizaram previamente explorações na representação gráfica de três funções, em *applets* do GeoGebra, com objetivo de reconhecer o limite infinito $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$, foram desafiados a representar as possíveis representações geométricas das condições de existência de assíntota horizontal ao gráfico de uma função, com base nas noções de limite no infinito. Os dados revelam que dois pares e Talita não apresentaram resposta à Q_5T_9. Elias, Haziel e os demais seis pares restantes apresentaram representações geométricas das duas possíveis condições de existência de assíntota horizontal, nomeadamente, $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$. Tal como na resposta do par Ismael e Jorge (figura 7.2.15), estes estudantes apresentaram esboços de gráficos de funções, contendo, de forma elucidativa, indicações de registos tracejados de reta horizontal passando pelo ponto de ordenada $y = L$ como forma de indicar a implicação geométrica de $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$ (assíntota horizontal), evidenciando facilidade na construção de representação geométrica identificável do limite no infinito.

Q_5T_9: Quais seriam as possíveis representações geométricas das condições identificadas na questão anterior?

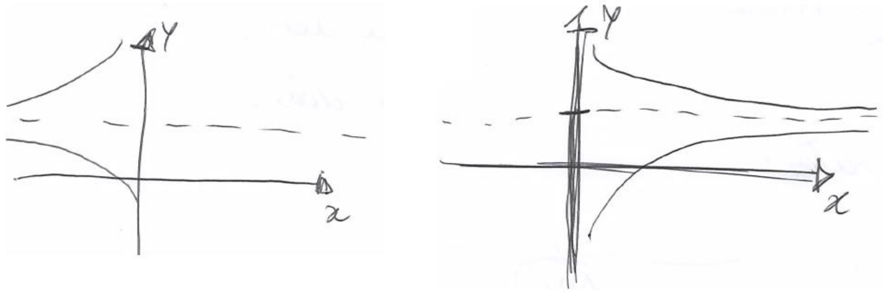


Figura 7.2.15 – Resposta do par Ismael e Jorge à Q_5T_9

Já nas questões $Q_{12}T_4$, Q_8T_{15} e Q_7T_{11} pretendia-se verificar se os estudantes eram capazes de representar algebricamente o conceito de limite por meio de sua definição formal. Esta análise começa pela $Q_{12}T_4$, em que os estudantes foram desafiados a representar o $\lim\limits_{x\to 2} 2x+4$ através de uma expressão algébrica envolvendo a noção de vizinhanças, representadas por $V_\delta(2)$ e $V_\varepsilon(8)$ ou por intervalos $]2-\delta, 2+\delta[$ e $]8-\varepsilon, 8+\varepsilon[$. Dois dos nove pares recorreram à representação verbal do limite e, para defini-lo, complementaram-na adequadamente com representações algébricas das variáveis do limite em questão, tendo por base a noção de vizinhança, como exemplificado no diálogo entre Fátima e Miriam durante a resolução e a sua resposta a esta questão (figura 7.2.16).

Fátima: Vai, vamos ver a 12.
Miriam: Deixa eu ler (lê a questão). Então pera aí! Para $x \in V_\delta(2)$... Coloca então: Para $\lim\limits_{x\to 2} 2x+4=8$ temos que, para $x \in V_\delta(2)$, isso quer dizer que x está na vizinhança de 2. Temos que, não! Pera aí! Coloca uma setinha! (diz à Fátima que está a escrever a resposta) $y=f(x)$ pertence a vizinhança do limite, 8.
Fátima: Ah que lindeza que ficou! Então ficou o x está na vizinhança do x_0 , e o y na vizinhança do limite. E acabou!

12. A partir das ideias trabalhadas nas questões anteriores apresente uma definição do $\lim\limits_{x\to 2} 2x+4=8$, tomando como base as ideias de vizinhanças $V_\varepsilon(8)$ e $V_\delta(2)$.

Para $\lim\limits_{x\to 2} 2x+4=8$, temos que para $X \in V_\delta(2) \to Y \in V_\varepsilon(8)$

Figura 7.2.16 – Diálogo do par Fátima e Miriam e sua resposta à $Q_{12}T_4$

Este par recorreu à representação verbal e utilizou uma implicação algébrica ($x \in V_\delta(2) \to y \in V_\varepsilon(8)$) para indicar que o limite é resultado do processo em que as imagens $f(x)$ pertencem à vizinhança de $L=8$, sempre que os valores de x pertencem à vizinhança de $x_0 = 2$. Embora sua resposta contenha um erro algébrico ao registar $\rightarrow$ e não $\Rightarrow$, os registos corretos das variáveis do limite assentados na noção de vizinhança, nomeadamente, $x \in V_\delta(2)$ e $y \in V_\varepsilon(8)$ evidencia um adequado *tratamento* algébrico da implicação $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$, necessária à compreensão da definição formal de limite no ponto.

Os demais sete pares de estudantes não conseguiram representar o limite por uma expressão algébrica que envolvesse a noção de vizinhanças. Estes pares apresentaram respostas incompletas e até incoerentes do limite, revelando possuírem dificuldades na representação algébrica do limite como resultado da implicação $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$, conforme se verifica na resposta de Eliseu e Vítor: "Os <u>valores das vizinhanças</u> de $x_0(\delta)$ será <u>sempre metade</u> dos <u>limites</u> de $L(\varepsilon)$". A resposta deste par não apresenta uma definição de limite, uma vez que não contém indicações da implicação $x \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x) \rightarrow L$. Além disso, os termos nela sublinhados correspondem às explicações incorretas de resultados também incorretos, obtidos na exploração da tarefa sobre o limite em questão.

Apesar dos resultados anteriores indicarem dificuldades da generalidade dos estudantes sobre a representação algébrica do limite na sua definição formal, verifica-se que estas dificuldades foram superadas ao longo da experiência de ensino. Esta conclusão é baseada nas respostas apresentadas pelos estudantes à Q_8T_{15} onde, para provar formalmente a continuidade de uma função no ponto $x_0 = 2$, os estudantes deveriam representar algebricamente o $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ por meio da sua definição formal.

Apenas o par Miguel e Paulo não apresentou resposta à Q_8T_{15}, evidenciando não terem sido capazes de mobilizar significados das simbologias da definição formal de limite para representá-lo formalmente. Os demais sete pares apresentaram uma expressão algébrica do $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$, contendo registos algébricos de $x \rightarrow 2$ e $f(x) \rightarrow 1$ baseadas na noção de vizinhanças ($|x-2| < \delta$ e $|f(x) - 1| < \varepsilon$) e indicações corretas dos quantificadores e de sua ordem nessa expressão, evidenciando um correto *tratamento* das simbologias da definição formal do limite no ponto, conforme exemplificado no excerto da resposta do par Gil e Maria à Q_8T_{15} (figura 7.2.17).

Q_8T_{15}: Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 3$. Prove, por meio da definição formal, que a função f é contínua em x_0.

Podemos concluir que:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que se $x \in D$ e $|x-2| < \delta$ então $|f(x) - 1| < \varepsilon$

Figura 7.2.17 – Excerto de resposta do par Gil e Maria à Q_8T_{15}

Já na Q_7T_{11}, após os estudantes terem explorado, numa *applet* do GeoGebra, a representação geométrica do limite no infinito $\left(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right)$, contendo registos assentes na simbologia da sua definição formal, verifica-se que seis dos nove pares conseguiram representá-lo algebricamente por sua definição formal. Esses estudantes foram capazes de reconhecer que os registos geométricos de $x \to \infty$ e $f(x) \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ eram traduzidos pelas respetivas desigualdades $x > A$ e $|f(x) - 0| < \varepsilon$ e, com base nessas descobertas, representar $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ por uma expressão algébrica que envolvia uma relação implicativa entre as desigualdades $x > A$ e $|f(x) - 2| < \varepsilon$, com uso correto dos quantificadores ($\forall\, \varepsilon > 0$ e $\exists A > 0$), tal como exemplificada na resposta de Miriam (resolveu individualmente) à Q_7T_{11} (figura 7.2.18).

Q_7T_{11}: A partir das ideias trabalhadas nas questões anteriores, escreva uma definição formal para o conceito matemático apresentado na questão 6?

PARA UMA $V_\varepsilon(0) : (-\varepsilon, \varepsilon)$ OS VALORES DE $f(x)$ SE APROXIMARÃO DO LIMITE = ZERO ... OU SEJA

$x > A$ PARA $x > A$ E $|f(x) - 0| < \varepsilon$

$V_\varepsilon(0)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A > 0$, $x \in D$ $x > A$ ENTÃO $|f(x) - 0| < \varepsilon$

Figura 7.2.18 – Resposta de Miriam à Q_7T_{11}

Ademais, há evidências de que explorações dinâmicas de pontos $(x, f(x))$ com $x > A$ e $f(x) \in V_\varepsilon(0)$, e do seletor ε que gerava modificações na vizinhança $V_\varepsilon(0) =]-\varepsilon, \varepsilon[$, favoreceu a conexão registos algébricos e geométricos associados à definição formal do limite no infinito e possibilitou os estudantes a representar o limite algebricamente por sua definição formal, tal como se confirma no diálogo de Miriam com o professor na resolução da Q_7T_{11} (figura 7.2.19).

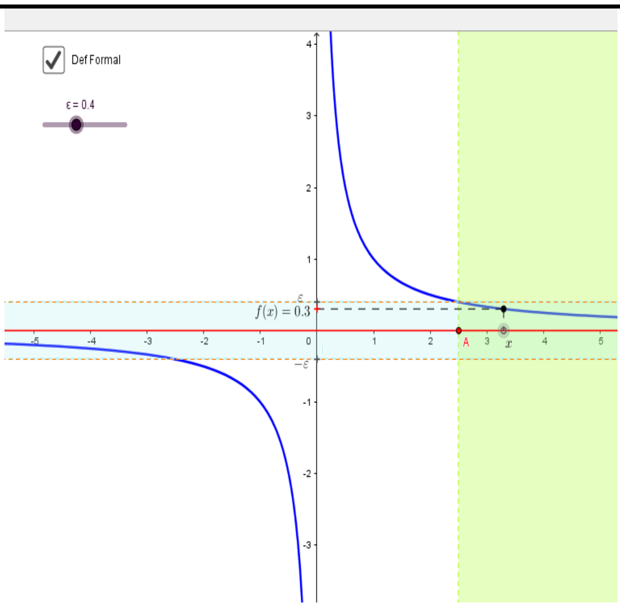
Miriam: Professor, eu deduzi que o $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Então nesta questão 7 eu vou ter que escrever uma definição formal para este limite aqui [refere-se a $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$]?

Professor: Exato. (…) Vamos lá, arrasta o x conforme o enunciado da questão 6. O que está acontecendo com o comportamento de x?

Miriam: Está crescendo infinitamente [arrasta o seletor x aumentando-o].

Professor: Como é que você representaria em símbolos?

Miriam: Como eu vou representar isso? [modifica o seletor ε e x e visualiza $x \to \infty$ na *applet*]. O x [pausa] espera aí, eu tenho que fazer o módulo? Mas não tem vizinhança pois está tendendo a infinito!



[Visualiza o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$] Ah, não! Espera aí, [visualiza $x \to \infty$ na *applet*] (…) Ah! O x está maior que a imagem. A imagem não! [pausa] É o ponto A! x maior do que A! Ehhhhh que bonitinho!

Figura 7.2.19 – Diálogo e exploração no GeoGebra de Miriam na resolução da Q_7T_{11}

No diálogo, verifica-se que Miriam evidencia ter reconhecido que a relação entre o quantificador $\exists A > 0$ e a desigualdade $f(x) < A$ traduz algebricamente o registo geométrico associado a $x \to \infty$, partir das explorações que realizou na *applet* do GeoGebra, pois arrasta o seletor x fazendo $x \to \infty$ e conclui: "É o ponto A! x maior do que A!". Na sequência do diálogo, o professor conduz Miriam, com questionamentos, à tradução algébrica do comportamento de $f(x)$.

> **Professor:** Isso aí! Agora diminui o ε e veja o que acontece com as imagens $f(x)$.
>
> **Miriam:** Vou diminuir [arrasta ε, fazendo $\varepsilon \to 0$]. O valor de A está aumentando. Espera aí, agora vamos ver a $f(x)$ [faz $x \to \infty$ e visualiza $f(x) \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ na *applet*]. Ela está tendendo a zero.
>
> **Professor:** Escreve em notação simbólica.
>
> **Miriam:** A gente falou agora, foi $x > A$. Ok. A $f(x)$ está tendendo a zero [visualiza $f(x) \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Então a $f(x)$ eu posso colocar $f(x) < \varepsilon$?
>
> **Professor:** A $f(x)$ tem que estar onde?
>
> **Miriam:** Tem que estar dentro da vizinhança!
>
> **Professor:** Que vizinhança?
>
> **Miriam:** De raio ε em torno do zero [mostra $f(x) \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ na *applet*]. Então, espera aí. Para $\varepsilon > 0$ e $x > A$ existe uma vizinhança de raio ε em torno do zero [escreve $|f(x) - 0| < \varepsilon$] […].

Torna-se evidente neste diálogo que as explorações realizadas por Miriam na *applet* do GeoGebra permitiu-lhe reconhecer que a relação entre o quantificador $\forall\varepsilon > 0$

e a desigualdade $|f(x) - 2| < \varepsilon$ traduz algebricamente o registo geométrico associado a $f(x) \in V_\varepsilon(0)$ quando $\varepsilon \to 0$, pois, arrasta os seletores ε e x da *applet*, de forma a que $\varepsilon \to 0$ e $x \to \infty$, visualiza o comportamento dos pontos $(x, f(x))$ com $f(x) \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ e conclui: "A $f(x)$ está tendendo a zero [visualiza $f(x) \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ na *applet*]. Então a $f(x)$ eu posso colocar $f(x) < \varepsilon$?". Ademais, ao ser questionada pelo professor sobre qual vizinhança de $f(x)$ está a referir-se, Miriam mostra-lhe $f(x) \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ na *applet* e responde "De raio ε em torno do zero … Para $\varepsilon > 0$ e $x > A$ existe uma vizinhança de raio ε em torno do zero [escreve $|f(x) - 0| < \varepsilon$]", evidenciando assim que foi capaz de associar o registo geométrico de $f(x) \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ à desigualdade $|f(x) - 0| < \varepsilon$. Desta forma, confirma-se que as explorações na *applet* do GeoGebra ajudou Miriam a realizar conexão entre os registos algébricos ($x > A$ e $|f(x) - 0| < \varepsilon$) e geométrico ($x \to \infty$ e $f(x) \in]-\varepsilon, \varepsilon[$) associados à definição formal do conceito de limite e a traduzir formalmente o limite no infinito, pois responde "$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A > 0,\ x \in D\ \ x > A$ então $|f(x) - 0| < \varepsilon$" à Q_7T_{11} (figura 7.2.18).

Os demais três pares de estudantes não conseguiram representar corretamente o limite infinito pela expressão algébrica de sua definição formal. Estes estudantes apresentaram o registo incorreto da correspondência implicativa $x > A \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(0)$, por vezes desassociada do papel dos seus quantificadores, revelando dificuldades na construção da definição formal de limite no infinito, tal como verifica-se na resposta de Clara e Haziel (figura 7.2.20). A resposta apresentada por este par contém registo incorreto das desigualdades $x > A$ e $f(x) \in V_\varepsilon(0)$ associadas ao limite no infinito, nomeadamente, regista $|x - B| < \varepsilon$ ao invés de $x > A$ e regista $|f(x) - A| > \delta$ ao invés de $|f(x) - 0| < \varepsilon$, e ainda, uso incorreto de quantificador pois regista $\exists \delta > 0$ ao invés $\exists A > 0$, os quais revelam incompreensões da implicação $x > A \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(0)$ e do papel e uso dos quantificadores para representar formalmente o limite.

Q_7T_{11}: A partir das ideias trabalhadas nas questões anteriores, escreva uma definição formal para o conceito matemático apresentado na questão 6?

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que, $A > 0$ e $B < 0$ sendo $|x - B| < \varepsilon$ $|f(x) - A| > \delta$

Figura 7.2.20 – Resposta de Clara e Haziel à Q_7T_{11}

7.2.3. Transformar o conceito de limite em diferentes representações

A capacidade de transformar o conceito de limite entre suas diferentes representações (geométrica e algébrica) foi analisada nas questões Q_2T_5 e Q_3T_{15} em que os estudantes deveriam representar geometricamente a definição formal de limite, nas questões $(Q_9 \text{ e } Q_{10})T_{10}$, $(Q_5 \text{ e } Q_6)T_{12}$ e $(Q_7 \text{ e } Q_{8.a)})T_{14}$, que requeriam representação algébrica de aspetos associados ao conceito de limite. Essas transformações tinham em conta a realização *tratamentos e conversões* entre as representações do limite.

Nas questões Q_2T_5 e Q_3T_{15}, em que os estudantes eram solicitados a representar geometricamente o limite expresso pela sua definição formal, sete dos oito pares e o trio, na Q_2T_5, e sete dos oito pares na Q_3T_{15}, conseguiram *convertê-lo* geometricamente. Destes, um par e o trio na Q_2T_5 e três pares na Q_3T_{15}, representaram corretamente apenas o caso em que $L = f(x_0)$. Os restantes seis pares na Q_2T_5 e cinco pares na Q_3T_{15}, representaram os três possíveis casos de existência do limite (L) num ponto, nomeadamente, (i) $L = f(x_0)$, (ii) $L \neq f(x_0)$ ou (iii) o limite (L) existir e a função não estar definida em x_0. Todos esses estudantes foram capazes de *converter* a representação algébrica para geométrica e explicar as variáveis relacionadas aos registos convertidos, por exemplo, representar geometricamente as expressões $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ em termos das respetivas vizinhança $V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$, apresentando um correto *tratamento* da representação geométrica do limite, conforme exemplificado nas respostas de Eliseu e Vítor (Q_2T_5) e de Cláudio e Pedro (Q_3T_{15}), apresentadas na figura 7.2.21.

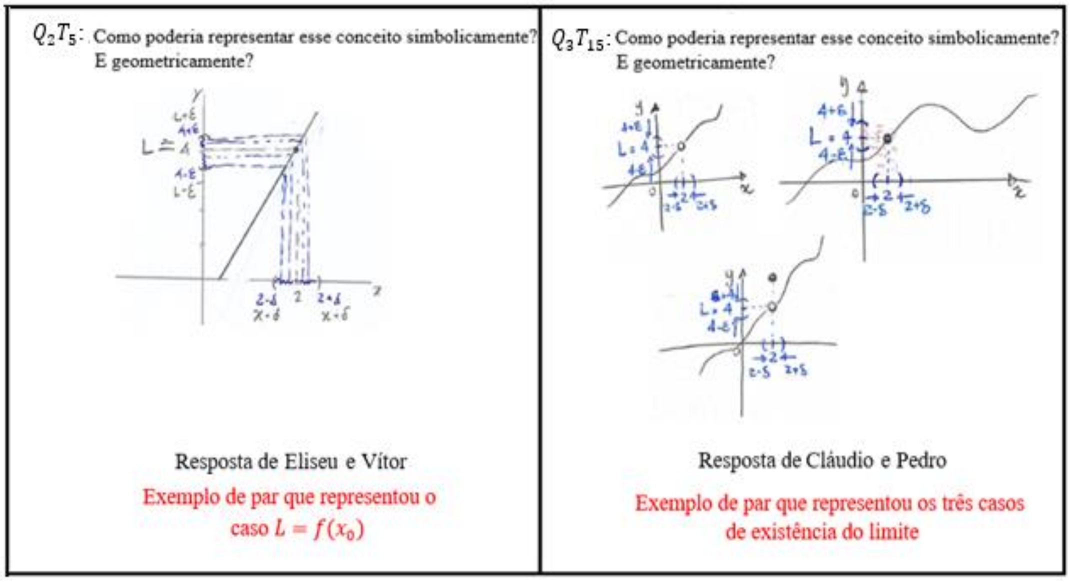


Figura 7.2.21 – Resposta de pares de estudantes à Q_2T_5 e Q_3T_{15}

Estes estudantes apresentaram no plano cartesiano o esboço do gráfico de uma função, registos geométricos corretos das simbologias $|x-2|<\delta$ e $|f(x)-4|<\varepsilon$, formados por intervalos abertos centrados em $x_0=2$ e $f(x)=4$ e por esquemas elucidativos de pontos $(x,f(x))$ ou por setas, evidenciando facilidade na *conversão* da representação algébrica do limite, expressa na sua definição formal, para a sua representação geométrica, contendo um correto *tratamento* nos registos convertidos.

Os pares Gil e Maria, na Q_2T_5, e Miguel e Paulo, na Q_3T_{15} não foram capazes de *converter* geometricamente o limite expresso pela sua definição formal. Estes pares de estudantes apresentaram registos geométricos com falta do esboço do gráfico da função e incorretos registos algébricos das variáveis do limite ($x \to x_0$ e $f(x) \to L$) revelando dificuldades no *tratamento* e *conversão* da representação geométrica do limite, tal como na resposta de Miguel e Paulo, na Q_3T_{15} (Figura 7.2.22). Embora a resposta desse par apresente registos geométricos no plano cartesiano de simbologias da definição formal do limite, os erros conceituais no registo dos extremos de $V_\varepsilon(L)$ colocando por exemplo $(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$ em vez de $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, a falta do esboço do gráfico da função e de indicações de $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$ mostram um incorretos registos da representação geométrica do limite, revelando não terem sido capazes de converter o limite geometricamente.

Q_3T_{15}: Como poderia representar esse conceito simbolicamente? E geometricamente?

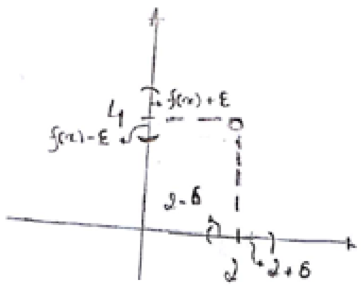
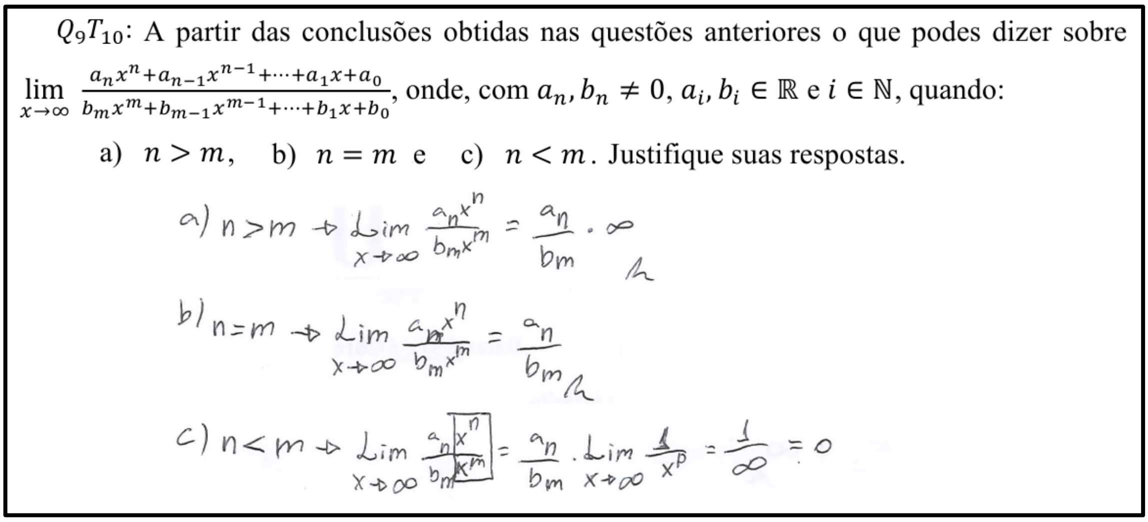


Figura 7.2.22 – Resposta do par Miguel e Paulo à Q_3T_{15}

Nas (Q_9 e Q_{10})T_{10}, os estudantes foram desafiados a representar algebricamente os resultados do cálculo algébrico do limite no infinito de funções racionais $\left[\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\right]$ e apresentar uma conjetura sobre ele. Os resultados mostram que dois dos sete pares de estudante revelam terem conseguido, de forma autónoma, representar algebricamente os resultados do cálculo algébrico do $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$, quando $n > m, n = m$ ou $n < m$. Entretanto, uma vez que não apresentam resposta à $Q_{10}T_{10}$, não foram capazes de correlacionar esses resultados e apresentar uma conjetura que descreve os possíveis resultados do cálculo do referido limite, nomeadamente, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} \infty \\ \text{ou} \quad se \quad n > m \\ -\infty \\ \frac{a_n}{b_m} \quad se \quad n = m \\ 0 \quad se \quad n < m \end{cases}$. Esta conclusão é verificada na resposta de Jorge e Pedro à Q_9T_{10} (figura 7.2.23).



Q_9T_{10}: A partir das conclusões obtidas nas questões anteriores o que podes dizer sobre $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$, onde, com $a_n, b_n \neq 0$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ e $i \in \mathbb{N}$, quando:

a) $n > m$, b) $n = m$ e c) $n < m$. Justifique suas respostas.

a) $n > m \to \lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m} = \frac{a_n}{b_m}\cdot\infty$

b) $n = m \to \lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m} = \frac{a_n}{b_m}$

c) $n < m \to \lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_n\boxed{x^n}}{b_m\boxed{x^m}} = \frac{a_n}{b_m}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^p} = \frac{1}{\infty} = 0$

Figura 7.2.23 –Resposta do par Jorge e Pedro à Q_9T_{10}

Na resposta apresentada, verifica-se que este par de estudante concebe que o limite no infinito de um polinômio é determinado pelo limite no infinito do seu monómio de maior grau e o associa à igualdade $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$, onde a_nx^n e b_mx^m são os monómios de maior grau, respetivamente, de $p(x)$ e $q(x)$. Esta conclusão decorre do registo $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$ apresentado para expressar o $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$ em cada uma das condições $n > m, n = m$ ou $n < m$, evidenciando *conversão* correta no cálculo de $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$. Apoiado neste conhecimento, este par revela ter conseguido representar corretamente os resultados algébricos do cálculo do $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$ quando $n > m$, $n = m$ ou $n < m$, pois apresentam registos corretos $\frac{a_n}{b_m}\cdot\infty$, $\frac{a_n}{b_m}$ e 0 ao correspondente limite, apresentando um *tratamento* correto do $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$. Desta forma, este par revela ter sido capaz de realizar transformações corretas (*tratamento e conversão*) dos registos algébricos associado ao cálculo algébrico do limite no infinito de funções racionais o qual possibilitou-lhe representar algebricamente os resultados deste cálculo.

Relativamente aos demais cinco pares de estudantes, verifica-se que três pares não apresentaram respostas às questões $(Q_9$ e $Q_{10})T_{10}$ enquanto que os dois pares e Talita, que resolveu individualmente, apesar de evidenciarem possuir conhecimentos de que o limite no infinito de um polinômio é determinado pelo limite no infinito do seu monómio de maior grau, apresentaram registo incompletos ou até incoerentes do cálculo de $\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$, revelando possuírem dificuldades no processo e procedimento de cálculo algébrico, com registos literais, do limite no infinito, conforme se verifica na resposta de André e Paulo (figura 7.2.24).

Q_9T_{10}: A partir das conclusões obtidas nas questões anteriores o que podes dizer sobre $\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$, onde, com $a_n, b_n \neq 0$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ e $i \in \mathbb{N}$, quando:

a) $n > m$, b) $n = m$ e c) $n < m$. Justifique suas respostas.

a) $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$, não importa se $n > m$, ou n par ou ímpar ou m par ou ím

b) $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$, $n = m$ sempre $+\infty$ quando n e m iguais, apenas $f(x)$ diviso

c) $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$, não importa se $n < m$, apenas função divisora $\neq 0$

$n =$ par
$m =$ par

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{x^6}{x^6} \to \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{x^5}{x^5} \to \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty$
$\to \frac{-\infty}{-\infty} = +\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{x^6}{x^5} \to \lim_{x\to+\infty} f(x) \to \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty$
$\to \lim_{x\to-\infty} f(x) \to \frac{+\infty}{-\infty} = -\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{x^7}{x^6} \to \lim_{x\to+\infty} f(x) \to \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty$
$\to \lim_{x\to-\infty} f(x) \to \frac{-\infty}{+\infty} = -\infty$

Figura 7.2.24 – Resposta do par André e Paulo à Q_9T_{10}

Na resposta apresentada, evidencia-se que os estudantes concebem que $\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$, pois exemplificam por $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^6}{x^6}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^6}{x^5}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^6}{x^5}$ e $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^7}{x^6}$ o cálculo algébrico de $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$ quando $n > m$ e $n = m$. Entretanto, erros algébrico caracterizado por considerar $\frac{\infty}{\infty} = \infty$ e registos incorretos do resultado do cálculo algébrico de $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$ quando $n > m$ (item **a)**), $n = m$ (item **b)**) ou $n < m$ (item **c)**), nomeadamente $\lim\limits_{x\to+\infty} +\infty$, revelam dificuldades deste par de estudante na transformação (*tratamento* e *conversão)* de registos algébricos associados ao cálculo de limite no infinito de funções racionais, os quais impediram-lhe de representar algebricamente os resultados do cálculo algébrico $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$ e apresentar uma conjetura sobre este limite.

Nas $(Q_5$ e $Q_6)T_{12}$, os estudantes deveriam realizar explorações e simulações dinâmicas – numa *applet* do GeoGebra – de retas secantes que convergem para a reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto x_0, a fim de deduzir que o declive da referida reta tangente (m_T) é expresso algebricamente pela taxa de variação instantânea da função $\left(m_T = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$. Verifica-se que Clara (resolveu individualmente) e três dos oito pares de estudantes revelaram terem conseguido, de forma autónoma, alcançar satisfatoriamente essa aprendizagem. Estes estudantes foram capazes de: (i) reconhecer que o declive da reta secante só atinge o declive da reta tangente na passagem ao limite, e que o recurso analítico necessário para fazer o ponto Q se aproximar do ponto P consiste em fazer o número $h = x - x_0$ tender a zero; e (ii) expressar por meio da simbologia $m_T = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ou equivalente, o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $x = x_0$.

Para além disso, há evidências de que explorações de arrastamento do seletor x e/ou do ponto $P = (x, f(x))$, e a visualização dos seus efeitos na *applet*, nomeadamente, posicionamento de r_T no gráfico de f, da aproximação de r_S à r_T com indicações dos valores de seus respetivos declives m_S e m_T e da indicação geométrica do segmento $h = x - x_0$ e seu valor, tenham favorecido o reconhecimento desses pares sobre o declive da reta tangente (m_T) ao gráfico de uma função no ponto x_0, ser obtido pelo limite do declive da reta secante (m_S), quando $h \to 0$, e sua tradução algébrica por $m_T = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ou equivalente, como exemplificado no diálogo entre Eliseu e Vítor na resolução da Q_7T_{12} (figura 7.2.25).

Eliseu: Volta lá, clica pela direita de novo [Vítor arrasta o seletor x_Q e faz $h \to 0^+$]. A declividade da secante vai ser igual a da tangente quando o h for igual a zero. [visualiza na *applet* a secante coincidindo com a tangente] (…) Ou seja este h aqui some [indica $h = \varepsilon$ na *applet*].

Vítor: Vai ser então $\frac{f(x_0)}{x_0}$ porque é um ponto único! $\left[\text{indica } m_T = \frac{f(x_0)}{x_0}\right]$.

Eliseu: Porque na verdade, se eu aumentar aqui o h [arrasta x_Q] – olha lá a secante e a tangente – vou começar por variar a secante [visualização dinâmica de $r_S \to r_T$ na *applet*]. No ponto que ela tá, se aqui é zero [indica segmento h ‘nulo’ na *applet*], olha lá, a tangente e a secante são iguais [r_S convergindo para r_T $(r_S = r_T)$]. Os coeficientes delas são iguais [$m_S = m_T$ em valores numéricos]. … [Enquanto escreve $m_T = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, chama o professor para esclarecimentos].

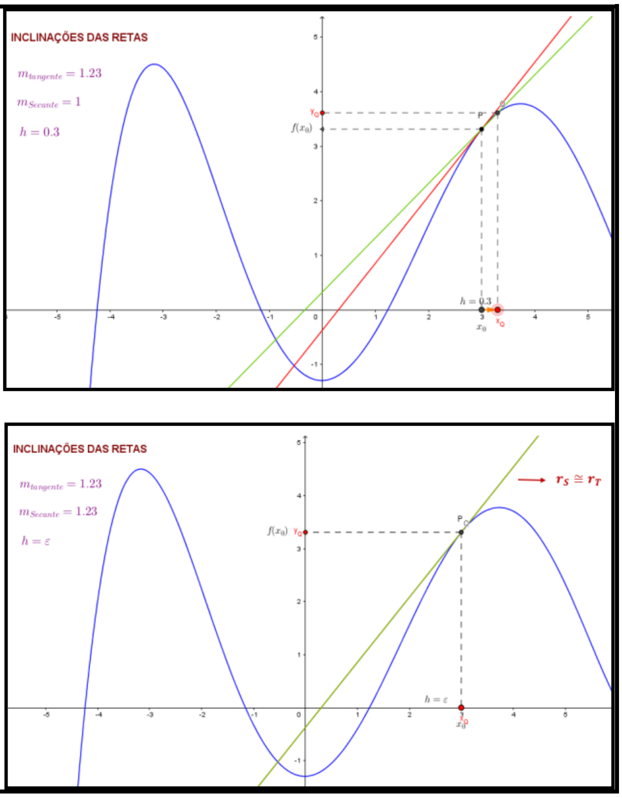


Figura 7.2.25 – Diálogo e exploração no GeoGebra do par Eliseu e Vítor na resolução da Q_7T_{12}

No diálogo, verifica-se que as explorações dinâmicas realizadas por Eliseu na *applet* permitiram-lhe reconhecer que o declive da reta tangente é obtido pelo limite dos declives das retas secantes e representá-lo algebricamente por $m_T = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, pois arrasta o seletor x_Q de modo que $h \to 0$ e, após visualizar a aproximação de r_S à r_T e os valores numéricos de seus declives, conclui: “A declividade da secante vai ser igual à da tangente quando o h for a zero (…) As inclinações da tangente e da secante são iguais”, escrevendo $m_T = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Em seguida chama o professor para esclarecimentos quanto a tradução algébrica desse declive, uma vez que o registo apresentado por Vítor $\left(m_T = \frac{f(x_0)}{x_0}\right)$ lhe pareceu estranha.

Eliseu: Agora vamos para o raciocínio. Para que isso aqui aconteça o meu h tem que ser zero. Quando o meu h for zero eu vou tê-las coincidindo.

Professor: O h é zero?

Eliseu: O h se aproximando de zero. Então a expressão seria essa aqui $m_T = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Eu vou ter que [interrompido por Vítor]

Vítor: Se eu tiver h se aproximando de zero, então terei um ponto em comum, um ponto. Então eu posso perder [suprimir] esse x_2 e $f(x_2)$ ficar apenas com $\frac{f(x_1)}{x_1}$.

Professor: Mas porque um ponto?

Vítor: Porque só tem um ponto P, que toca!

Professor: Sim, a reta tangente tem essa característica, toca num ponto. Mas ela está sendo alcançada pela aproximação da secante!

Vítor: Sim, não faz sentido! […]

Ao explicitar o seu raciocínio ao professor sobre como encontrou $m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, Eliseu é interrompido por Vítor que declara que $m_T = \frac{f(x_1)}{x_1}$. Para Vítor, a coincidência de $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ quando $h \to 0$ indicava que apenas um ponto deveria ser considerado na expressão algébrica de m_T resultando em $m_T = \frac{f(x_1)}{x_1}$. Na sequência do diálogo, o professor realiza questionamentos, a fim de o conscientizar de que a eliminação de um dos pontos na representação algébrica de m_T, não considera a conclusão correta de Eliseu sobre a reta tangente ser obtida pela aproximação convergente da reta secante. Após essa reflexão do professor, Vítor revela um entendimento do processo de determinação da expressão algébrica de m_T.

Vítor: Ah! Acho que entendi. Tipo, vai ser esse $m_S = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, e por r_T ser alcançada, faz $h \to 0$ para chegar a esse $\left[m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right]$. … [professor ausenta-se do diálogo].

Eliseu: Calma aí Vítor, como é essa história aí?

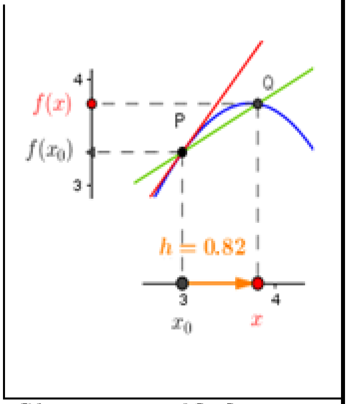
Vítor: Para a gente achar a inclinação dessa aqui que se movimenta [indica a r_S na *applet*] é essa aqui [indica na folha de resposta $m_S = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$], ok?

Eliseu: Sim.

Vítor: E agora para a gente achar a inclinação de r_T, que é parado [fixo na *applet*], basta pegar esse que se movimenta $\left[m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right]$, substituir as coordenadas de $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ e vai ter m_T [escreve $m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$]. Agora você entendeu por que é isso daqui $\left[m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right]$? Quando o h está chegando para cá [mostra $h \to 0$ na *applet*], fica a mesma inclinação [visualiza a igualdade dos valores $m_T = m_S$ na *applet*]. Esse Q está se aproximando de P para ficar com a mesma inclinação. Tem que ser o limite!

Vítor esclarece que para encontrar a expressão algébrica de m_T é preciso aplicar $h \to 0$ ("pegar esse que se movimenta") à expressão algébrica de m_S substituindo o ponto $(x_2, f(x_2))$ por $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$. Escreve $m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e para justificá-la recorre às explorações no GeoGebra, pois arrasta o seletor x_Q a fim de que $h \to 0$, visualiza $r_S = r_T$ e conclui "tem que ter limite", revelando seu conhecimento de que o declive da reta secante só atinge o valor do declive da reta tangente na passagem ao limite. Desta forma, evidencia-se que as explorações na *applet* do GeoGebra ajudaram o par Eliseu e Vítor a representar corretamente o declive da reta tangente ao gráfico de uma função, representado geometricamente pela taxa de variação instantânea de uma função.

Os demais cinco pares de estudantes não conseguiram, de forma autónoma, representar algebricamente o declive da reta tangente ao gráfico de uma função no ponto x_0. As dificuldades apresentadas na determinação da expressão algébrica do declive da reta secante e/ou no processo de "passagem ao limite" $\left(\lim_{h \to 0}\right)$, como forma de expressar algebricamente a aproximação da reta secante à reta tangente, impediram-lhes de traduzir algebricamente o declive da reta tangente ao gráfico de uma função no ponto x_0. O diálogo a seguir entre Cláudio e Pedro na resolução da $(Q_5$ e $Q_6)T_{12}$ e a sua resposta a estas questões confirmam essa conclusão (figura 7.2.26).

<table>
<tr><td>Diálogo</td><td>Pedro: Escreva uma … [lê o enunciado da Q_5T_{12}]. E só achar os pontos dela [reta secante] e jogar na fórmula. Quem são os pontos A e B? […] Porque o x_0 é origem! Se aqui ele pega o $x_2 - x_1$ ele pega o extremo menos a origem. Tem dois pontos A e B, então você tem um vetor $\overrightarrow{AB}$. A distância [no eixo x] é o que? $B - A$. […] Então vai ser o último menos o primeiro. Então vai ser o h, que é o último porque o x é fixo – o h vai para lá e o h vem pra cá – menos x_0.
Cláudio: Então vai ser $\frac{f(h)-f(x_0)}{h-x_0}$. Escreva uma … [lê a Q_6] Porque eu sei que quando $x_1 = x_2$ a gente tem o coeficiente angular da reta tangente. Pega esses dois pontos [P e Q]. A lá você vai ter $\frac{f(3)-f(3)}{3-3}$. Aí vai dar $\frac{0}{0}$.


Pedro: A gente teria que ter dois pontos na reta tangente. Só tem um ponto! […]
Cláudio: Entendi! A expressão para achar os dois pontos é isso aqui $m = \frac{f(h)-f(x_0)}{h-x_0}$. Para achar o declive da tangente, você vai ter de usar apenas um ponto, que seria então $\frac{f(x_1)}{x_1}$ que isso aqui daria $\frac{f(3)}{3}$ [suprime o ponto $Q(h, f(h))$].
Pedro: Mas tem que explicar o porquê! Porque só corta um ponto, não tem dois pontos para definir … entendeu?</td></tr>
<tr><td>Resposta</td><td>5. Escreva uma expressão algébrica que represente a inclinação da reta secante s, apresentada nessa cena, em função de x_0 e h?
$m = \frac{f(h) - f(x_0)}{h - x_0}$ $P = (x_0, f(x_0))$
$Q = (h, f(h))$.
6. Escreva uma expressão algébrica (em função de x_0 e h) que represente o valor da inclinação da reta tangente ao gráfico da função f, no ponto x_0? Explique por que é que essa expressão realmente atende ao que é pedido nesta questão.
$m = \frac{f(x_1)}{x_1} \therefore m = \frac{f(3)}{3} \therefore f(3) = 3{,}69$
Devido a tangente cortar em somente um ponto não existe a diferença entre pontos.</td></tr>
</table>

Figura 7.2.26 – Diálogo, exploração e resposta do par Cláudio e Pedro às $(Q_5$ e $Q_6)T_{12}$

Este par de estudantes recorreu à substituição das coordenadas dos pontos Q e P na expressão que descreve o declive de uma reta que passa por dois pontos $A(x_1, f(x_1)$ e $B(x_2, f(x_2))$ $\left(m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right)$ para representar algebricamente o declive da reta secante (m_S). Contudo, o erro em considerar o ponto Q por $(h, f(h))$ ao invés de $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ impediu-lhe de representar corretamente a expressão algébrica de m_S, registando $m_S = \frac{f(h)-f(x_0)}{h-x_0}$ na resposta da Q_5T_{12}.

Além disso, os excertos das respostas dos estudantes, "para achar o declive da tangente, você vai ter de usar apenas um ponto" (Cláudio) e "porque só corta um ponto, não tem dois pontos" (Pedro), revelam que o conhecimento desses estudantes acerca da reta tangente como a reta que corta o gráfico da função em apenas um ponto, conduziu-os à conclusão errada de que a igualdade $m_T = m_S$ é satisfeita quando $P = Q$ e ao erro em suprimir as coordenadas do ponto Q (h e $f(h)$) da expressão algébrica de m_S para representar algebricamente o declive da reta tangente. Eles não se aperceberam que a igualdade $m_T = m_S$ é satisfeita quando a convergência $r_S \to r_T$ é alcançada, o qual se dá na passagem ao limite, cujo recursos algébrico consiste na aplicação de $\lim_{h\to 0}$ ao m_S a fim de obter o valor de m_T $\left(m_T = \lim_{h\to 0} m_S\right)$.

As dificuldades descritas anteriormente poderiam ser um obstáculo à resolução de problemas de aplicação da taxa de variação instantânea, como problemas de otimização, cuja resolução seria exigida na tarefa T_{14}. Por este motivo, o professor conduziu o momento da discussão coletiva desta tarefa T_{12} com questionamentos, que visavam consolidar a noção do declive da reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto x_0 ser expresso algebricamente por $m_T = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, a fim de viabilizar a superação de dificuldades associadas a esta noção, por parte dos estudantes que a continham.

No momento da discussão coletiva, o professor projetou no quadro negro a *applet* do GeoGebra usada na resolução esta tarefa, realizou nela simulações dinâmicas da aproximação da secante à reta tangente e questionou os estudantes sobre a existência deste limite. Em seguida, questionou os estudantes sobre que conclusão é possível chegar em relação à reta secante, à medida que Q se aproxima de P. Foi quando a estudante Miriam respondeu que "a reta secante está virando a reta tangente", indicando que a sua conclusão se baseava na visualização dos efeitos das explorações realizadas na *applet* do GeoGebra.

O professor aproveitou a resposta desta estudante e, tendo esboçado no quadro negro um registo geométrico e elucidativo do processo de aproximação da reta secante à reta tangente, explicou à turma que a secante convergir para a tangente é resultado da igualdade de seus declives ($m_T = m_S$), o qual é satisfeita quando a convergência de $Q \rightarrow P$ é garantida – na passagem ao limite – em que as distâncias entre as coordenadas de P e Q são desprezíveis ($|f(x_0 + h) - f(x_0)| \rightarrow 0$ e $|(x_0 + h) - (x_0)| \rightarrow 0$).

Após este momento de explicação o professor questionou a turma sobre o recurso analítico necessário para garantir a igualdade dos declives das retas secante e tangente ($m_T = m_S$), e vários estudantes responderam: o h tende a zero. Mediante essa resposta, aproveitou para esclarecer que embora a reta tangente intercetasse o gráfico da função em apenas um ponto $P(x, f(x))$, era possível obter o seu declive (m_T) a partir do declive da reta secante (m_S) desde que o ponto Q (na reta secante) convergisse para P, sendo a aplicação do $\lim\limits_{h \to 0}$ ao m_S, o recurso algébrico necessário para obtenção desse declive $\left(m_T = \lim\limits_{h \to 0} m_S\right)$. O professor concluiu esse momento de discussão deduzindo com os estudantes a expressão algébrica do declive da reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto x_0 expressa por $m_T = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e aplicando-a para resolver a Q_8T_{12}.

Após esta experiência, na tarefa T_{14}, os estudantes foram conduzidos no processo de modelação da confeção de uma caixa de formato paralelepípedo, a partir de explorações na *applet* do GeoGebra. Os estudantes realizaram simulações dinâmicas no gráfico da função V (volume da caixa) e da reta tangente ao gráfico de V no ponto $P = (x_0, V(x_0))$, a fim de a representar traduzir algebricamente o declive da reta tangente ao gráfico de uma função no seu ponto máximo por $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$ e deduzir o procedimento algébrico de encontrar o valor de x que produz o maior volume da caixa.

No processo de exploração da *applet*, os estudantes apresentaram facilidade em posicionar no gráfico da função V, o ponto $P = (x, V(x))$ que corresponde ao maior volume da caixa e estimar o valor de sua abscissa x, tendo sido favorecidos por suas habilidades no domínio do GeoGebra. Contudo, estas explorações revelaram uma limitação do GeoGebra que não apresentava a reta tangente ‘totalmente’ horizontal, no ponto máximo do gráfico de V (figura 7.2.27). Esta limitação é causada por pequenas incorreções visuais na representação de pontos $(x, f(x))$, quando são considerados valores de x com representação decimal infinita.

Nestes casos, o ponto apresentado visualmente no GeoGebra apresenta "arredondamentos" impercetíveis de suas coordenadas mais que ao ser associado à inclinação da reta tangente logo se verifica o erro. Ela poderia dificultar a análise dos estudantes da característica geométrica da reta tangente na Q_7, e os impedir de deduzirem o valor do seu declive no ponto de máximo da função, tal como evidenciada no questionamento de Clara ao professor quando resolve a questão (Q_7): "Professor, nos outros gráficos, o aplicativo permitia a gente colocar valores quebradinhos. Este aqui já não. Eu acho que se ele fosse, tipo 1,65, talvez a reta ficasse horizontal".

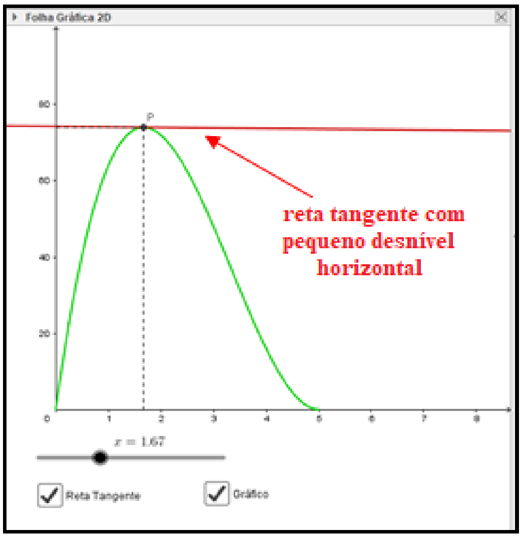


Figura 7.2.27 – Exploração no GeoGebra na resolução da Q_7T_{14}.

Na sequência do questionamento de Clara, o professor esclareceu aos estudantes que havia uma limitação visual na representação do ponto de máximo da função V, na *applet* do GeoGebra, causada por valores decimais periódicos das suas coordenadas. Pediu-lhes que clicassem com o '*mouse*' no seletor x e, com a tecla '*Shift*' no teclado pressionada, alterassem os valores de x usando as setas do teclado, a fim de obter uma adequada representação geométrica do ponto de máximo e da reta tangente ao gráfico da função, neste ponto. Desta forma, essa limitação do GeoGebra foi resolvida tendo os estudantes seguido, sem problemas tecnológicos, para a resolução da tarefa.

Na sequência da intervenção do professor, os estudantes encaminharam a resolução das questões $(Q_7$ e $Q_{8.a)})T_{14}$, onde foram desafiados a determinar o procedimento algébrico de obtenção do valor de x que determina a caixa de maior volume. Os resultados indicam que todos os seis pares conseguiram reconhecer que o declive da reta tangente ao gráfico de uma função no seu ponto máximo é nulo e expressá-lo algebricamente por $m_T = \lim_{h \to 0} \frac{V(x_0+h)-V(x_0)}{h} = 0$ ou equivalente, a fim de indicar o procedimento algébrico de determinação do valor de x descrito na tarefa. Há evidência de que essas aprendizagens tenham sido facilitadas por explorações dinâmicas do ponto

$P = (x, V(x))$ e do registo geométrico da reta tangente ao gráfico de V, na *applet* do GeoGebra, tal como exemplificado no diálogo entre Fátima e Miriam (figura 7.2.28).

Miriam: Agora vai. Foi, vai mais. Aí 1.67. [arrasta o seletor x e posiciona $P = (x, V(x))$ no máximo do gráfico de V – Exploração 1]
Fátima: E quanto ficou o volume? [visualizam o valor $V(x)$ na *applet*]
Miriam: 74.05. Aí vai [amplia o gráfico de V e visualiza a r_T na *applet*]. É isso mesmo 1,67. [...] Questão 7 [lê o enunciado]. Espera aí, ela não tem inclinação! Ela é horizontal [visualiza a r_T na *applet*]. Aqui você está vendo que a reta tem inclinação [arrasta o seletor x fazendo $x = 2$ na *applet* e visualiza a r_T – Exploração 2]
Fátima: Sim.
Miriam: Mas quando a gente coloca no ponto máximo, não tem inclinação [arrasta o seletor x e posiciona $P = (x, V(x))$ no máximo de $V(x)$ e visualiza a r_T horizontal]. Que tipo de reta se torna a reta tangente? Uma reta constante. [...]
Fátima: Ela virou uma reta paralela ao eixo x Miriam.
Miriam: Quando ela atinge isso aqui [indica o ponto máximo de V] a inclinação dela é zero. Sua inclinação é zero por que Fátima? O que é a inclinação da reta? É o ângulo que ela faz com o eixo x certo?
Fátima: Sim. [...] A gente descobriu geometricamente o valor de $x = 1{,}67$ que é quando a reta fica horizontal.
Miriam: Ele quer agora algebricamente, como sempre né?
Fátima. Por ela ser paralela ao eixo x sua inclinação é zero. Você substitui zero no valor de m_T. $\left[m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0\right]$.
Miriam: Vamos fazer então $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$ ...

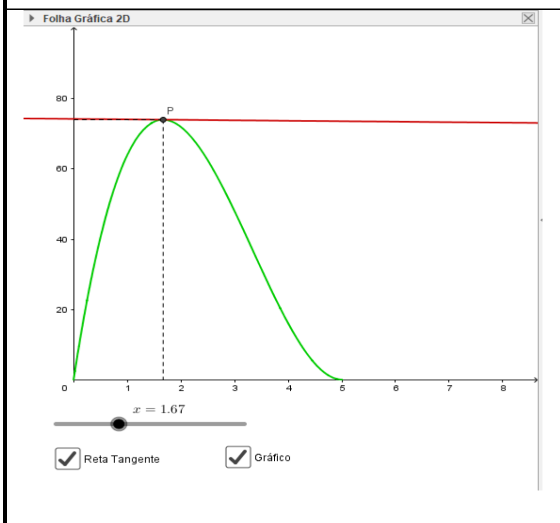
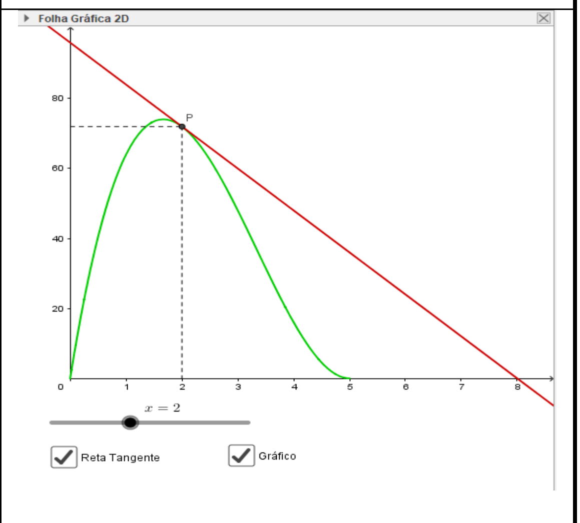
EXPLORAÇÃO 1	**EXPLORAÇÃO 2**
	

Figura 7.2.28 – Diálogo e exploração no GeoGebra do par Fátima e Miriam na Q_7T_{14}

No diálogo, verifica-se que Fátima e Miriam realizam na *applet*, explorações de arrastamento do seletor x e ampliação do gráfico de V, a fim de deduzir o valor do declive da reta tangente ao gráfico de V no seu ponto de máximo. A visualização dos efeitos dessas explorações, nomeadamente, posicionamento do ponto $P = (x, V(x))$ e do registo geométrico horizontal da reta tangente no gráfico de V permitiu-lhes verificar que uma vez que a reta tangente era paralela ao eixo x seu declive era igual a zero, tal como se confirma nos excertos "Quando ela atinge isso aqui a inclinação dela é zero" (Miriam) e "Por ela ser paralela ao eixo x, a inclinação é zero" (Fátima).

Ademais, essas explorações ajudaram as estudantes a mobilizarem conhecimentos sobre o declive da reta tangente ao gráfico de uma função ser expresso algebricamente por $m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ para traduzir algebricamente o declive da reta tangente ao gráfico de f no seu ponto máximo por $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$. Sob esta conclusão justifico que, partir das explorações realizadas na *applet*, os estudantes concluem: "Por ela ser paralela ao eixo x, a inclinação é zero. Você substitui zero no valor de $m_T \left[m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0\right]$" e "Vamos fazer então $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$". Desta forma, apresentam uma correta *conversão* da representação geométrica para a representação algébrica, associada à taxa de variação instantânea da função.

Os resultados anteriormente apresentados nesta secção 7.2 revelam que a generalidade dos estudantes possui um conhecimento adequado das diferentes representações (verbal, tabular, algébrica e geométrica) do conceito de limite, necessário à sua compreensão, uma vez que são capazes de as articular para interpretar o limite e o representar informal e formalmente.

Esta conclusão torna-se mais evidente nas respostas dos estudantes na entrevista final (E_F). Os quatro estudantes entrevistados ao serem desafiados, na Q_1E_F**,** a analisar suas próprias respostas à Q_3E_I (entrevista inicial), a qual pedia-lhes para descreverem o que sabem sobre a simbologia $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$ e para manter, acrescentar ou indicar correções nestas respostas, Maria, Miriam e Pedro foram capazes de atualizar suas respostas à Q_3E_I**,** apresentando explicações corretas do limite e representando-o corretamente nas suas diferentes representações (verbal, algébrica e geométrica).

Estes estudantes recorreram à representação verbal do limite para explicá-lo, contendo indicações das aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to L$ como forma de ressaltar o comportamento convergente da função f em torno de $x = 2$. Complementaram-na com representações algébricas informal e/ou formal do limite em questão, nomeadamente, pela representação algébrica da igualdade dos limites laterais e/ou por uma expressão algébrica de sua definição formal, e representaram geometricamente os três possíveis casos de sua existência, apresentando uma adequada e correta transformação (*tratamento* e *conversão*) de seus registos geométrico, com base nas noção de vizinhança, tal como exemplifica-se na resposta de Maria (figura 7.2.29).

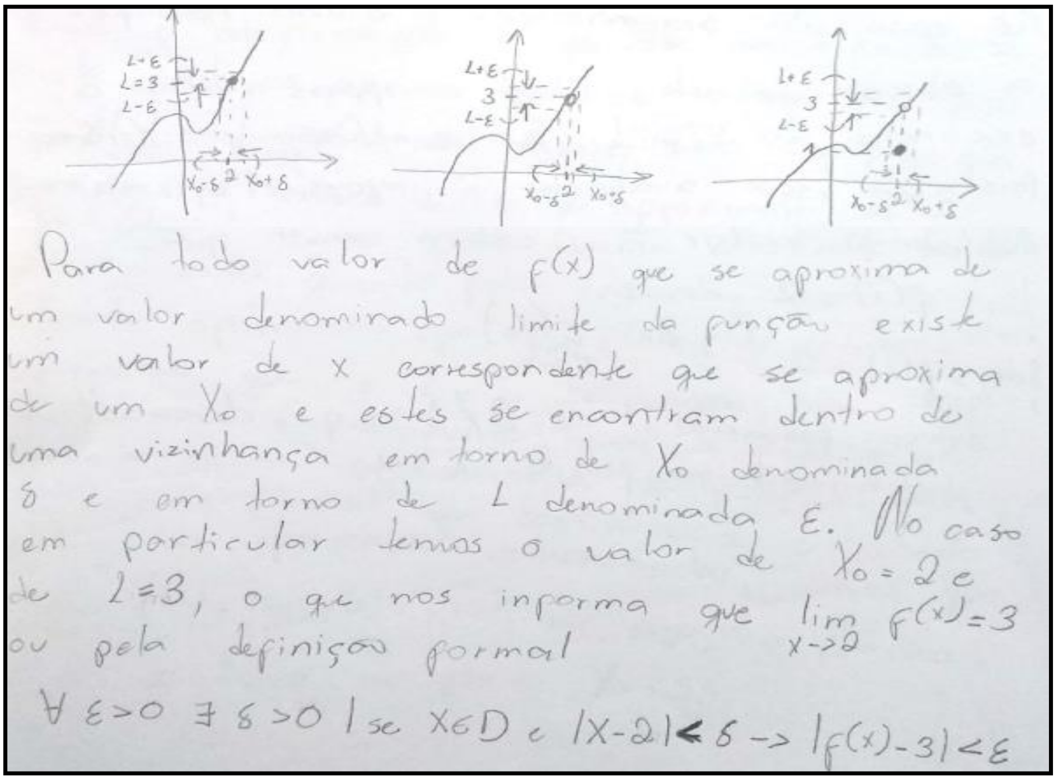


Figura 7.2.29 – Resposta de Maria à Q_3E_F

Já Eliseu evidenciou ter sido capaz de realizar conexões parciais entre as diferentes representações do limite (figura 7.2.30). Ele apresentou explicação correta do limite, recorrendo à sua representação verbal e complementando-a com representações algébrica/informal da igualdade de limites laterais e geométrica assente nas aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to L$. Contudo, a falta dos registos dos extremos dos intervalos de $V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$, embora apresente indicações dos respectivos raios (δ e ε), e dos registos geométricos dos três possíveis casos do limite, no registos geométricos e algébricos do limite por ele apresentado, indicam que as diferentes representações do limite ainda não estão totalmente consolidadas por este estudante, pois não foram por ele mobilizadas para representar o $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$.

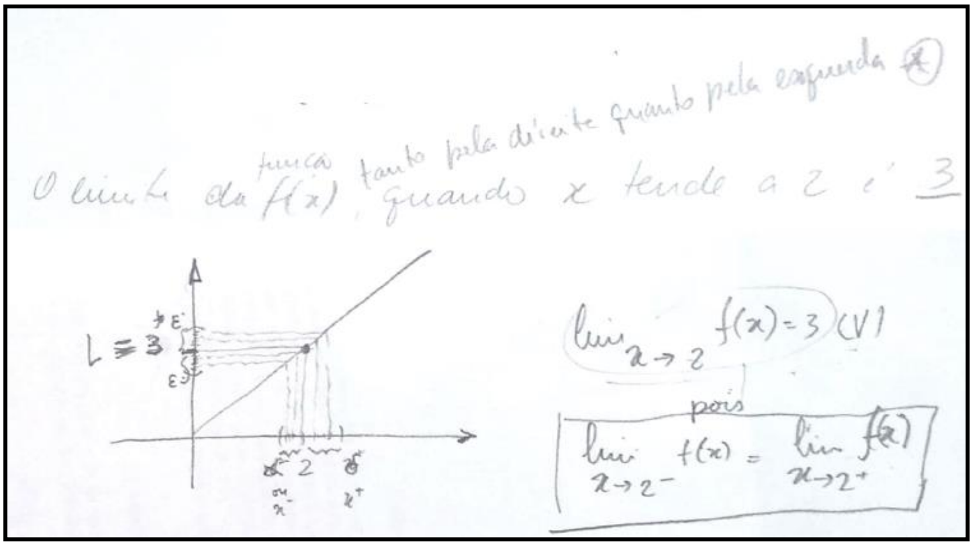


Figura 7.2.30 – Resposta de Eliseu à $Q_3 E_F$

7.2.4. Síntese

Em resumo, a análise dos dados revela que a generalidade dos estudantes possui um conhecimento correto das diferentes representações (verbal, tabular, algébrica e geométrica) do conceito de limite e foi capaz de realizar conexões adequadas e corretas dos registos associados a essas diferentes representações, apresentando facilidade no *tratamento* e *conversões* entre elas.

Os estudantes apresentam facilidade no reconhecimento do conceito de limite quando representado geometricamente, com registos assentes nas aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to L$ ou nas simbologias da sua definição formal, e algebricamente por sua definição formal, recorrendo predominantemente à representação verbal para explicar adequadamente as simbologias que o traduzem. Eles complementam as suas explicações com outros registos que traduzem igualmente o limite, como por exemplo, a representação tabular do limite, usada para facilitar a identificação das convergências numéricas nas aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to L$, e representações algébricas como o $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e a definição formal de limite. Também revelam serem capazes de reconhecer o conceito de limite no resultado do seu cálculo algébrico, nomeadamente, que o resultado do cálculo de $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{0}{0}$ é indeterminado e que o resultado do $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{k}{0}$, onde f é uma função racional, determina um limite infinito. Desta forma, mostram facilidade nas *conversões* e *tratamentos* das diferentes representações do limite.

Relativamente à capacidade de representar o conceito de limite nas suas diferentes representações (algébrica e geométrica) verifica-se que a generalidade dos estudantes revelou facilidade em representar geometricamente o limite, a partir da *conversão* correta de sua representação algébrica, realizando *tratamentos* adequados de seus registos, alguns dos quais apoiados nas simbologias da expressão algébrica da definição formal de limite. Entretanto, no início da aprendizagem da definição formal de limite, verifica-se os estudantes apresentaram dificuldades em conceber o limite como resultado da implicação $x \in V_{\delta}(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_{\varepsilon}(L)$ o que lhes impediu de representar o limite por sua definição formal. Entretanto, há evidências de que a maioria dos estudantes superou as dificuldades iniciais, pois foram capazes de representar o $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ e o $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ por expressões algébricas contendo registos corretos dos quantificadores, das desigualdades algébricas a eles associados e correspondência implicativa entre essas desigualdades, apresentando um correto registo da definição formal dos referidos limites.

Sobre a capacidade de realizar transformações (*tratamentos* e *conversões*) entre as diferentes representações do limite, observa-se que generalidade dos estudantes foi capaz de *converter* a representação algébrica da definição formal do limite numa representação geométrica, contendo indicações das variáveis relacionadas aos registos convertidos, por exemplo, representar geometricamente as desigualdades $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ em termos das respetivas de vizinhança $V_{\delta}(x_0)$ e $V_{\varepsilon}(L)$, apresentando um correto *tratamento* da representação geométrica do limite. Também foram capazes de *converter* algebricamente por $m_T = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$, o declive da reta tangente ao gráfico de uma função f no seu ponto máximo $P(x_0, f(x_0))$, a fim determinar a equação que permite obter o valor das coordenadas de P.

Entretanto, ao nível dos procedimentos algébricos, apresentam dificuldades no trabalho com variáveis algébricas, nas coordenadas dos pontos no plano cartesiano expressas por expressões literais, o que demonstrou limitações no âmbito da Álgebra. Estas dificuldades impediram a maioria dos pares dos estudantes de traduzir algebricamente (i) os resultados do cálculo algébrico do limite no infinito de funções racionais $\left[\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\right]$ e apresentar uma conjetura sobre ele; e (ii) o declive da reta tangente ao gráfico de uma função no ponto x_0 pela taxa de variação instantânea.

No que se refere ao papel do GeoGebra no trabalho com as diferentes representações do conceito de limite, verifica-se que as explorações nas *applets* dos GeoGebra, que possibilitaram a realização de conexões entre representações algébricas e geométricas do conceito de limite, favoreceu o reconhecimento do limite no resultado do seu cálculo algébrico e a representação algébrica da sua definição formal.

Sob estes aspetos, aponto que simulações da convergência $f(x) \to L$ quando $x \to x_0$ na representação geométrica do $\lim_{x \to x_0} f(x)$, correlacionada à representação algébrica do seu cálculo, possibilitou o reconhecimento de que o resultado algébrico $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{0}{0}$ constituiu uma forma de indeterminação de limite. Semelhantemente, a visualização das convergências $x \to x_0^+$ e $x \to x_0^-$, $f(x) \to \infty$ ou $f(x) \to -\infty$, no gráfico de uma função f, correlacionada aos registos algébricos do cálculo dos limites laterais, possibilitaram o reconhecimento de que o resultado algébrico $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \frac{k}{0}$ e/ou $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \frac{k}{0}$ determina limites infinitos. Verifica-se ainda que explorações dos pontos $(x, f(x))$ com $x \to \infty$ e $f(x) \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ na representação geométrica do limite no infinito, com registos assentes na sua definição formal, e a conexão com registos algébricos de $x > A$ e $(|f(x) - 0| < \varepsilon)$, favoreceu a representação da definição formal do limite no infinito.

Também se verifica que explorações dinâmicas que permitiram a convergência das retas secantes (r_S) à reta tangente (r_T) ao gráfico de uma função, com indicações dos valores de seus respetivos declives m_S e m_T e da indicação geométrica $h \to 0$ com $h = x - x_0$, tenham favorecido o reconhecimento de que m_T é obtido pelo limite m_S, quando $h \to 0$, e sua tradução algébrica por $m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

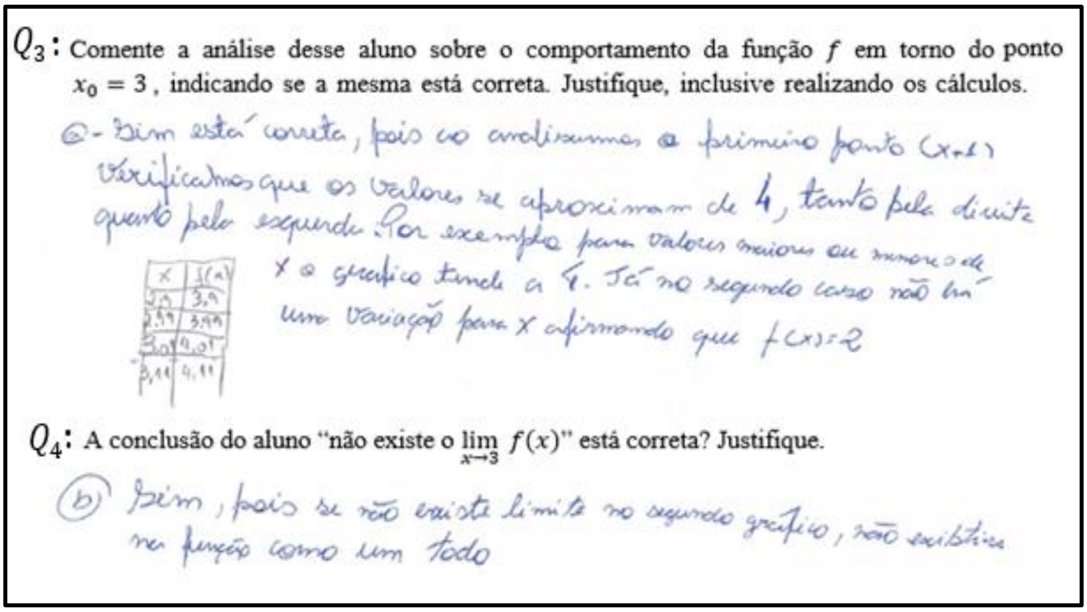
Por fim, observa-se que a visualização do deslocamento dinâmico no gráfico de uma função V, do ponto $P = (x, V(x))$ e do registo geométrico da reta tangente ao gráfico de V em P, favoreceu a tradução do declive m_T da reta tangente no ponto máximo da função V por $\lim_{h \to 0} \frac{V(x_0+h)-V(x_0)}{h} = 0$, ou expressão equivalente.

7.3. Resolução de problemas que envolve o conceito de limite

No que respeita à resolução de problemas, os estudantes foram desafiados a aplicar os seus conhecimentos sobre o conceito de limite para: (i) analisar proposições matemáticas que envolvem a aplicação da condição de existência do $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e o cálculo do $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e conhecimentos sobre a sua definição formal, validando-as ou justificando as incorreções nelas presentes; (ii) resolver problemas que envolvem a aplicação da taxa de variação instantânea de uma função no ponto x_0.

7.3.1. Resolução de problemas que remetem à análise de proposições matemáticas

A capacidade de aplicar conhecimentos do conceito de limite para analisar proposições matemáticas que o envolve começa por ser analisada nas questões $(Q_3$ e $Q_4)T_2$, em que os estudantes analisaram a resolução algébrica do cálculo de $\lim_{x \to 3} f(x)$ onde $f(x) = \begin{cases} x+1 & se\ x \neq 3 \\ 2 & se\ x = 3 \end{cases}$, a fim de identificar, corrigir e justificar o erro na afirmação "não existe o $\lim_{x \to 3} f(x)$". Apenas o par Eliseu e Vítor não conseguiu identificar o erro da afirmação nas condições descritas na Q_3T_2 (figura 7.3.1).


Q_3: Comente a análise desse aluno sobre o comportamento da função f em torno do ponto $x_0 = 3$, indicando se a mesma está correta. Justifique, inclusive realizando os cálculos.

a- Sim está correta, pois ao analisarmos o primeiro ponto (x+1) verificamos que os valores se aproximam de 4, tanto pela direita quanto pela esquerda. Por exemplo para valores maiores ou menores de x o gráfico tende a 4. Já no segundo caso não há uma variação para x afirmando que f(x)=2

x	f(x)
2,9	3,9
2,99	3,99
3,01	4,01
3,11	4,11

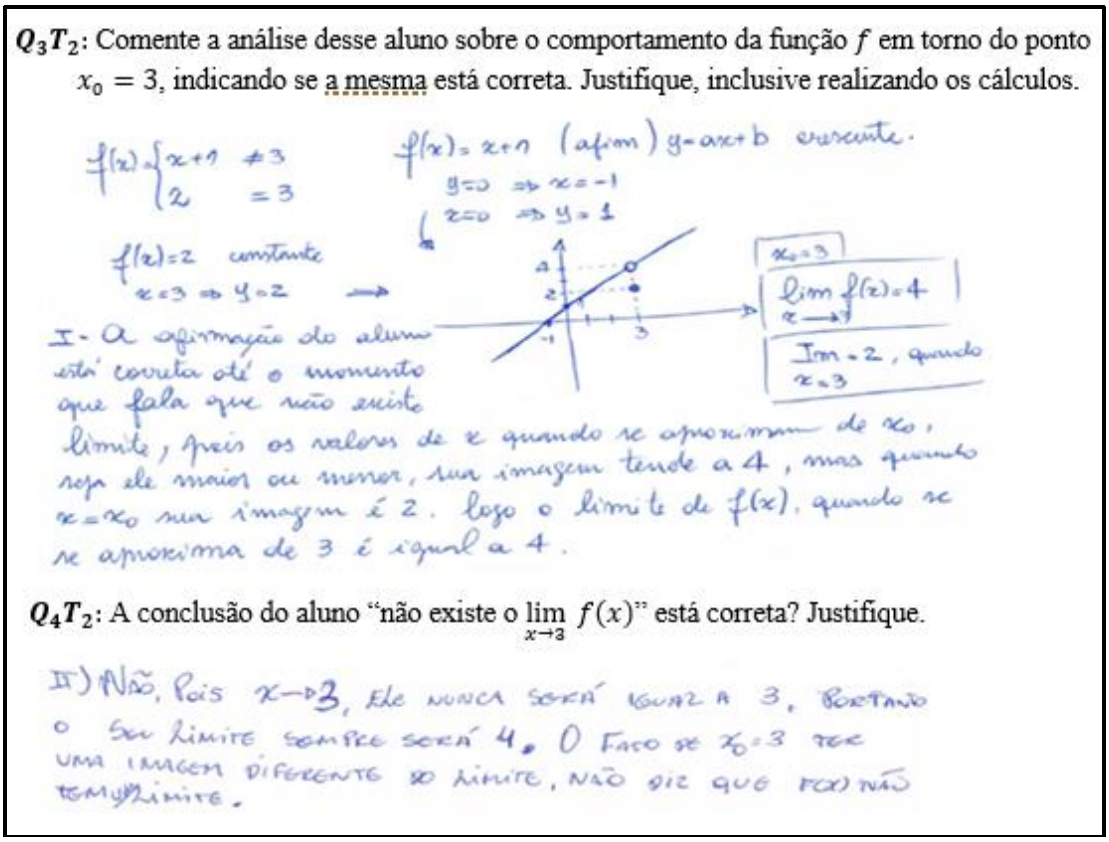
Q_4: A conclusão do aluno "não existe o $\lim_{x \to 3} f(x)$" está correta? Justifique.

b) Sim, pois se não existe limite no segundo gráfico, não existiria na função como um todo

Figura 7.3.1 – Resposta do par Eliseu e Vítor às questões $(Q_3$ e $Q_4)T_2$

Este par analisou o comportamento das imagens $f(x)$ na vizinhança de $x_0 = 3$ para analisar o $\lim_{x \to 3} f(x)$. Recorreu primeiramente à análise da parte da função definida para $x \neq 3$ $(f_1(x) = x + 1)$, por meio de uma tabela de valores para registar os valores de $x \to 3$ e de suas respetivas imagens $f(x)$, e concluiu que "os valores (das imagens) se aproximam de 4". Também analisou a função no ponto $x_0 = 3$ concluindo "que $f(x) = 2$". A sua resposta à Q_4T_2, "Sim, pois se não existe limite no segundo gráfico, não existiria na função como um todo", revela o conhecimento limitado deste par de estudantes sobre o limite, concebendo-o como a imagem do ponto através da função, impediu-lhe de reconhecer a existência do $\lim_{x \to 3} f(x)$ e, consequentemente, de refutar a afirmação sobre a sua inexistência.

Os demais sete pares de estudantes, incluindo Talita e Cláudio que resolveram individualmente, conseguiram resolvê-las corretamente. Estes estudantes analisaram o comportamento das imagens $f(x)$ na vizinhança de $x_0 = 3$, realizando procedimentos algébricos de cálculo do limite, algumas vezes complementados por registos numéricos apoiados em tabelas das aproximações simultâneas $x \to 3$ e $f(x) \to 4$ e concluíram que $\lim_{x \to 3} f(x)$ existe. Refutaram o erro na afirmação "não existe o $\lim_{x \to 3} f(x)$" e justificaram-no com base na condição de existência do limite, por vezes, complementando com registos geométricos de esboço de gráfico de funções, tal como exemplificado na resposta de Pedro e Ismael (figura 7.3.2).



$\boldsymbol{Q_3 T_2}$: Comente a análise desse aluno sobre o comportamento da função f em torno do ponto $x_0 = 3$, indicando se a mesma está correta. Justifique, inclusive realizando os cálculos.

$f(x) \begin{cases} x+1 & \neq 3 \\ 2 & = 3 \end{cases}$

$f(x) = x+1$ (afim) $y = ax+b$ crescente.

$y=0 \Rightarrow x=-1$

$x=0 \Rightarrow y=1$

$f(x)=2$ constante

$x=3 \Rightarrow y=2$

$x_0 = 3$

$\lim_{x \to 3} f(x) = 4$

$Im = 2$, quando $x = 3$

I - A afirmação do aluno está correta até o momento que fala que não existe limite, pois os valores de x quando se aproximam de x_0, seja ele maior ou menor, sua imagem tende a 4, mas quando $x = x_0$ sua imagem é 2. logo o limite de $f(x)$, quando se se aproxima de 3 é igual a 4.

$\boldsymbol{Q_4 T_2}$: A conclusão do aluno "não existe o $\lim_{x \to 3} f(x)$" está correta? Justifique.

II) NÃO, Pois $x \to 3$, Ele NUNCA SERÁ IGUAL A 3, PORTANTO O SEU LIMITE SEMPRE SERÁ 4. O FATO DE $x_0 = 3$ TER UMA IMAGEM DIFERENTE DO LIMITE, NÃO DIZ QUE F(X) NÃO TEM LIMITE.

Figura 7.3.2 – Resposta do par Ismael e Pedro às questões (Q_3 e Q_4)T_2

Na $Q_2 T_8$, os estudantes analisaram a expressão algébrica apresentada em cada um de seus 6 (seis) itens e associá-la a uma das afirmações: (1) Definição formal de

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$; (2) Definição formal de $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$; e (3) Não corresponde à definição formal de nenhum dos limites anteriores. Para esta questão, era requerido conhecimentos dos quantificadores e de sua ordem na expressão algébrica da definição formal do limite no ponto e limite infinito, e também da significação das desigualdades algébricas associadas à definição formal dos referidos limites.

Verifica-se que nove grupos responderam corretamente a todos os itens, mobilizando conhecimento sobre a definição formal de limite, particularmente os significados dos quantificadores e da sua ordem, para identificarem as expressões corretas e justificarem incorreções identificadas. No item **a)** $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ *tal que se* $x \in D_f$ *e* $|x-1| < \delta$ *então* $|f(x)-2| < \varepsilon$, os estudantes reconheceram a definição formal do limite baseando-se na relação entre $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ e os quantificadores a eles associados, tal como na resposta de Talita (figura 7.3.3):

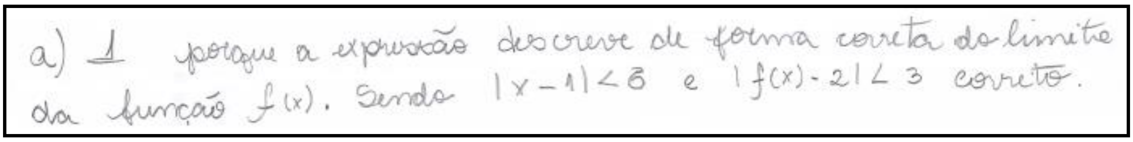

a) 1 porque a expressão descreve de forma correta do limite da função $f(x)$. Sendo $|x-1|<\delta$ e $|f(x)-2|<\varepsilon$ correto.

Figura 7.3.3 – Resposta da aluna Talita à $Q_{2.a)}T_8$

No item **b)** $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $|x-1| < \delta$ então $|f(x)-2| > \varepsilon$, estes estudantes identificaram que a referida expressão não traduzia a definição formal do limite $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. Fátima e Miriam, por exemplo, usaram o significado de vizinhança para justificar corretamente que $|f(x)-2| > \varepsilon$ representava as imagens $f(x)$ fora da vizinhança de $L = 2$, concluindo que a expressão não representava uma definição de limite, como se evidencia no diálogo e sua resposta ao item (figura 7.3.4).

Diálogo	**Fátima:** Eu coloquei que não existe porque aqui é maior que ε (referindo-se a $|f(x)-2| > \varepsilon$). Pois para todo $\varepsilon > 0$ o $|f(x)-2| < \varepsilon$. **Miriam:** Sim, deixa eu ver (analisa a expressão). Mas olha só, então se $|f(x)-2| > \varepsilon$, significa que são valores fora desta vizinhança (representa o intervalo $]\varepsilon-2, \varepsilon+2[$)? **Fátima:** Sim! É isso mesmo. Representa valores fora da vizinhança de 2. Coloca assim para ficar bonitinho.
Resposta	3. Porque $|f(x)-2| > \varepsilon$ não representa vizinhança. Pelo contrário, representa valores fora dessa vizinhança.

Figura 7.3.4 – Diálogo e resposta do par Fátima e Miriam à $Q_{2.b)}T_8$

No item **c)**, os estudantes conseguiram identificar e justificar o erro na troca de ordem dos quantificadores na expressão $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \ tal\ que\ se\ x \in D_f\ e\ |x-1| < \varepsilon\ então\ |f(x)-2| < \delta$. Os estudantes foram capazes de associar corretamente cada quantificador à respetiva desigualdade que o envolvia, e identificar a sua ordem na definição formal de limite, tal como se verifica na reposta de Eliseu e Vítor e no diálogo mantido por eles durante a resolução deste item (figura 7.3.5).

<table>
<tr><td rowspan="1">Diálogo</td><td>Vítor: Ele trocou! Este [δ] deveria ser com este [$|x-1| < \varepsilon$] e este [ε] com esse [$|f(x)-2| < \delta$]. Ok?
Eliseu: Pera aí! (analisa a definição formal). Sim, é isso mesmo.
Vítor: Ele inverteu! As associações foram invertidas. Tá vendo aqui ó ... [indica que deveria ser $|x-1| < \delta$ e $|f(x)-2| < \varepsilon$].
Eliseu: Sim, vamos escrever.</td></tr>
<tr><td>Resposta</td><td>3. Não corresponde, pois as associações estão invertidas/erradas. A vizinhança de x_0 deve ter δ e a vizinhança de $f(x)$, ε .</td></tr>
</table>

Figura 7.3.5 – Diálogo e resposta do par Eliseu e Vítor à $Q_{2.c)}T_8$

No item **d)** os estudantes reconheceram a definição formal do limite na expressão $\forall\ M > 0\ \exists\ \delta > 0\ \ tal\ \ que\ \ se\ \ x \in D_f\ \ e\ \ |x-1| < \delta\ \ então\ \ |f(x)-2| < M$, mesmo contendo uma simbologia (M) diferente da convencional (ε) para representar do raio da vizinhança do limite. Tal como na resposta de Clara e Haziel, "Mesmo quando trocamos ε da definição formal por outra letra, contanto que as propriedades se mantenham, a representação encontra-se correta", estes estudantes basearam as suas conclusões na relação estabelecida entre as desigualdades $|f(x)-L| < \varepsilon$ e $|x-x_0| < \delta$ e os quantificadores, evidenciando uma compreensão do seu papel na definição formal de limite.

No item **e)** $\forall\ A > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $|x-1| < \delta$ então $f(x) < A$, os estudantes conseguiram identificar que a relação entre o quantificador $\forall A > 0$ e a desigualdade $f(x) < A$ não traduz a implicação $f(x) \to 2$ ou $f(x) \to -\infty$, e concluir corretamente a inexistência de definição formal para o $\lim_{x\to 1} f(x)$, tal como se verifica na reposta de André e Paulo: "(3), $f(x) < A$, mas $A > 0$, assim o A é cada vez maior, não determina se há limite".

Por fim, no item **f),** os estudantes reconheceram a definição formal do limite infinito na expressão $\forall\ A < 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $|x-1| < \delta$ então $f(x) < A$. Tal como na resposta de Ismael e Jorge, "(2) Pois a definição bate certo com o

$\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$, onde para todo $A < 0$, ou seja, negativo, haverá um $f(x) < A$", estes estudantes basearam as suas conclusões na relação estabelecida entre os quantificadores e as desigualdades $|x - 2| < \delta$ e $f(x) < A$, evidenciando uma compreensão do papel dos quantificadores na definição formal de limite infinito.

Nessa questão Q_2T_8, somente o par Elias e Robson não respondeu corretamente a todos os 6 itens. As suas respostas "3. *Não sei explicar*" ao item **d)** e "3. *Não sei explicar*" ao item **e)** revelam dificuldades em atribuir significado as simbologias da definição formal de limite. Estes estudantes concluíram, no item **d),** que a expressão não traduzia a definição formal de $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ (indicado na resposta pela opção 3) mas não souberam explicar qual a possível incorreção quando o raio da vizinhança em torno de L estava representado por M. Já no item **e)**, embora indiquem corretamente a opção 3 como resposta, o fato de não saberem explicar que a associação entre o quantificador $\forall A > 0$ e a desigualdade $f(x) < A$ não traduz a implicação $f(x) \to 2$ ou $f(x) \to -\infty$, mostra incompreensões destes estudantes sobre a definição formal do limite infinito.

7.3.2. Resolução de problemas que apelam à modelação matemática e requerem aplicação da taxa de variação instantânea de uma função

Relativamente a aplicação de conhecimentos de limite para resolver problemas que envolve a aplicação da taxa de variação instantânea de uma função f no ponto x_0 $\left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$, verifica-se que apenas o par André e Paulo, e Clara (individualmente) conseguiram mobilizar conhecimentos para determinar, por meio de procedimentos algébricos, o valor do declive da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ em $x_0 = 2$, na questão Q_8T_{12}. Estes estudantes foram capazes de aplicar o $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ à expressão analítica da função $f(x) = x^2$ em $x_0 = 2$, apresentando adequada capacidade de manipulação de expressões algébricas, fatorização e divisão de polinómios para resolver a indeterminação $\frac{0}{0}$ no cálculo do referido limite e determinar o seu valor, conforme se verifica na resposta do par André e Paulo (figura 7.3.6)

Q_8T_{12}: Como é possível obter o declive da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 2$? Qual seria o valor desse declive?

$$\lim_{h \to 0} \text{sec} = \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{-h}$$

$$\lim_{h \to 0} \text{inc} = \frac{f(2) - f(2+h)}{-h} \to \frac{4-(h^2+4h+4)}{-h} \to \frac{-h^2-4h}{-h} \to h+4$$

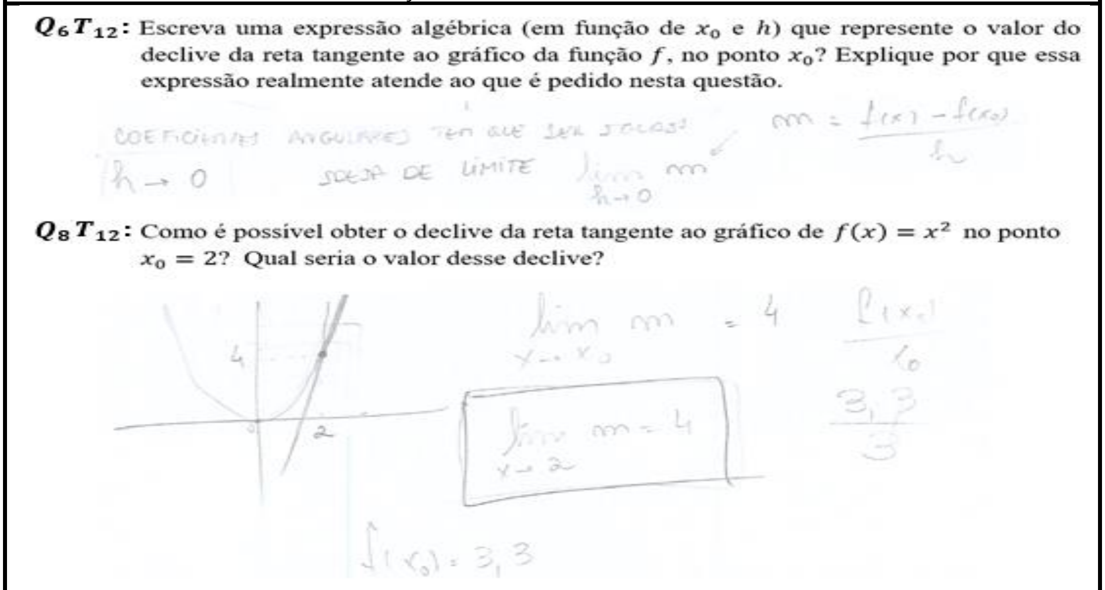
$$\lim_{h \to 0} \text{inc} = \underset{0+4}{h+4} \qquad \lim_{h \to 0} \text{inc} = 4$$

Figura 7.3.6 – Resposta do par André e Paulo à Q_8T_{12}

A resposta destes estudantes evidencia terem reconhecido que o declive da reta tangente ao gráfico de uma função no ponto x_0 é expresso algebricamente por $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, uma vez que para isso recorreram à sua equivalente expressão algébrica $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{-h}$. Além disso, foram capazes de aplicar corretamente nesta expressão algébrica a $f(x) = x^2$ tomando $x_0 = 2$, pois desenvolvem $f(2) = 4$ e $f(2+h) = h^2 + 4h + 4$, evidenciando terem fatorado e simplificado a fração algébrica $\frac{-h^2-4h}{-h}$ para obter $h + 4$ e aplicado $h \to 0$ na expressão simplificada para calcular o respetivo limite e encontrar o valor do declive da reta tangente procurada, ao fazerem "$\lim_{h \to 0} \text{inc} = h + 4 = 0 + 4$".

Os demais sete pares de estudantes não conseguiram aplicar a taxa de variação instantânea de uma função para determinar a expressão algébrica que representa o declive da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto $x = 2$ e obter o seu valor real. Dois desses pares não apresentaram a resolução do problema, enquanto que os outros cinco pares, tal como exemplificado na resposta de Fátima e Miriam e seu diálogo com o professor no momento da resolução de Q_6T_{12} (figura 7.3.7), apresentaram resoluções incompletas, contendo erros na tradução algébrica do declive da reta tangente ou no desenvolvimento e manipulação das expressões algébricas a ele associado, os quais mostram incompreensões dos procedimentos no cálculo algébrico de limite associada à taxa de variação instantânea $\left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$ a fim de determinar declive da reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto x_0 (Q_8T_{12}).

Miriam: O nosso coeficiente [declive] da tangente tem que ser igual a esse aqui óhh $\left[\text{indica } m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right]$ e o nossos h tem que tender a zero, certo?
Professor: Então o que eu posso concluir? Qual é a ideia envolvida aí?
Miriam: Bom, a ideia é de limite! [Faz $x_Q \to x_0$ na *applet*]. Simbolicamente a gente sabe que é o $\lim\limits_{x\to x_0}$ de alguma coisa.
Fátima: Dessa expressão aqui $m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.
Professor: Escrevam essas informações.



Q_6T_{12}: Escreva uma expressão algébrica (em função de x_0 e h) que represente o valor do declive da reta tangente ao gráfico da função f, no ponto x_0? Explique por que essa expressão realmente atende ao que é pedido nesta questão.

COEFICIENTES ANGULARES TEM QUE SER IGUAIS $m = \frac{f(x)-f(x_0)}{h}$

$h \to 0$ SOBRE DE LIMITE $\lim\limits_{h\to 0} m$

Q_8T_{12}: Como é possível obter o declive da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 2$? Qual seria o valor desse declive?

$\lim\limits_{x\to x_0} m = 4$ $\frac{f(x_0)}{x_0}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 2} m = 4}$ $\frac{3,3}{3}$

$f(x_0) = 3,3$

Figura 7.3.7 – Diálogo do par Fátima e Miriam com o professor na resolução da Q_6T_{12} e as respostas às questões (Q_6 e Q_8)T_{12}

Na figura anterior, observa-se que Fátima e Miriam concebem que o declive da reta tangente ao gráfico de f em x_0 (m_T) é obtido pela convergência do declive da reta secante (m_S) na passagem ao limite e associada à expressão $\lim\limits_{x_2\to x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, pois ao representarem m_T em termos de x_0 e h (Q_6T_{12}), Miriam afirma 'simbolicamente a gente sabe que é o $\lim\limits_{x\to x_0}$ de alguma coisa', sendo complementada por Fátima: 'dessa expressão aqui $m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ '. Ademais, registam $\lim\limits_{h\to 0} m$ com $m = \frac{f(x)-f(x_0)}{h}$ evidenciando terem aplicado $Q(x, f(x))$, $P(x_0, f(x_0))$ e $h = x - x_0$ na expressão literal $\lim\limits_{x_2\to x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ para traduzir algebricamente o declive m_T, o qual apresenta erro em considerar $Q(x, f(x))$ e não $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Os registos geométricos do gráfico de $f(x) = x^2$ com indicação da reta tangente em $x_0 = 2$ e os registos algébricos "$\lim\limits_{x\to x_0} m = 4$" e "$\frac{f(x_0)}{x_0}$", apresentados na resposta à Q_8T_{12}, evidenciam que esse par de estudantes apropriou-se da noção de reta tangente como a reta que corta o gráfico em apenas um ponto e cometeu erro de suprimir as coordenadas $(x, f(x))$ em $m_T = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{h}$ e indicar de forma errada $m_T = \frac{f(x_0)}{x_0}$, evidenciando que as incorreções no procedimento do cálculo algébrico da taxa de variação instantânea impediu esse par de estudantes de resolver corretamente o problema.

Saliento ainda, que as explorações realizadas pelos estudantes na *applet* do GeoGebra para resolver Q_8T_{12} revela alguns contributos. Sob esta afirmação aponto que as explorações de arrastamentos do seletor x_Q e movia o ponto $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$, e a visualização dos efeitos dinâmicos destas explorações, nomeadamente, de registos geométricos ou numéricos das aproximações sucessivas $r_S \to r_T$, $m_S \to m_T$ e $Q \to P$ no gráfico de uma função real, revela ter favorecido a resolução geométrica do problema da Q_8T_{12} e o reconhecimento de erros no procedimento de sua resolução algébrica. De facto, o primeiro contributo do GeoGebra é verificado no diálogo do par Gil e Maria para resolver a Q_8T_{12}, que recorreu à criação de *applet* do GeoGebra e explorações na *applet* da tarefa (RT2) para a resolver geometricamente o problema (figura 7.3.8).

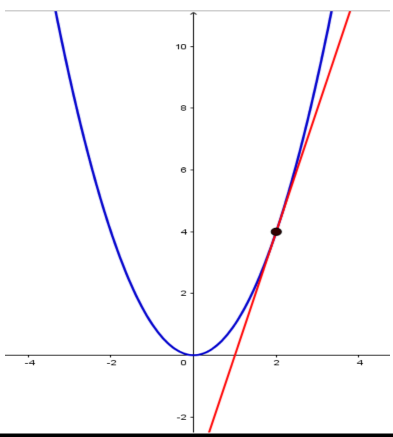
DIÁLOGO DA RESOLUÇÃO DA Q_8T_{12}	***APPLET* CONSTRUIDA PELO PAR GIL E MARIA**
Maria: Como é possível …. [Lê a Q_8T_{12}]. Ai meu Deus! **Gil:** Tem que abrir um novo arquivo [abre uma nova *applet* no GeoGebra]. Traça o gráfico para a gente ver. **Maria:** $f(x) = x^2$ [digita na barra de entrada $f(x) = x$^2”]. **Gil:** Tem que criar uma reta tangente. **Maria:** Espera aí, tem um [comando do GeoGebra] que é a reta tangente. Aqui óh [clica no seletor ‘tangentes’ do GeoGebra] **Gil:** Tá certo. Você seleciona a reta tangente. Isso. Dá um clique onde você quer jogar ela. Ah! Precisa de um ponto. O ponto é $x_0 = 2$ […] Aí! Pronto! [constroem uma *applet* representando as hipóteses do problema – Figura ao lado] **Maria:** Está aqui a reta tangente. Declive da reta tangente … [lê o enunciado da Q_8]. Qual seria o valor desse Declive? Ai meu Deus! Como obter o valor do declive?	

Figura 7.3.8 – Diálogo e exploração no GeoGebra do par Gil e Maria na resolução da Q_8T_{12}

O diálogo revela que esses estudantes recorreram ao GeoGebra para verificar geometricamente as hipóteses do problema de determinar o valor do declive da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ em $x_0 = 2$, apresentada na forma algébrica, a fim de o resolver geometricamente e encontrar uma estratégia de sua resolução algébrica. Por este motivo, abrem um novo arquivo do GeoGebra e digitam corretamente na sua barra de entrada os comandos “$f(x) = x$^2” e “(2,4)” para esboçar o gráfico da função

$f(x) = x^2$ e o ponto de f onde $x_0 = 2$. Também constroem a reta tangente (r_T) ao gráfico de f em $x_0 = 2$ a partir do comando "tangentes" do GeoGebra. Não conseguindo obter o valor numérico do declive de r_T pelo GeoGebra, Gil sugere utilizar a construção apresentada na *applet* RT2 (usada como suporte à tarefa 12) e realizar modificações em seus registos, atendendo às hipóteses do problema, a fim de resolvê-lo (figura 7.3.9).

DIÁLOGO DA RESOLUÇÃO DA Q_8T_{12}

Gil: E se trocar essa função daí para a $f(x) = x^2$ [...] [Na *applet*, clica na propriedade da função f e altera a expressão analítica que a define para $f(x) = x^2$ e observa o valor de $m_T = 6$ na *applet*]

Maria: Mas então, vamos ver [arrasta o seletor x_Q fazendo $x_Q = 3$]. Agora eu tenho uma reta vertical. O declive é 6. [...] Tá vendo? [Exploração 1]

Gil: O declive da tangente vai ser 6, certo?

Maria: O declive vai ser 6. Não! Ai meu Deus! Porque aqui o x_0 está definido aqui como três.

Gil: Vou mudar o x_0 aqui para 2 [tenta arrastar $x_0 = 2$]. Não muda! Não tem nenhum jeito de deixar ele móvel não?

Maria: Não consegue mudar. O P não muda. É fixo. Vamos ver na propriedade do ponto P, vamos lá. É $(3, 3.31)$. Óoooo, foi! [faz $P(2,4)$] e visualiza que $m_S = m_T = 4$ na *applet*]. É quatro, o $m_T = 4$. Mas porque é 4? [Exploração 2].

Gil: Porque a gente usou o GeoGebra.

Maria: Quatro pois, tananană. Aí vai entrar a regrinha de m_T [indica a expressão algébrica de m_T). Quer ver? ... Então eu vou botar direto aqui $\left[\text{indica } m = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right]$. Vou substituir o h por ε. Temos $m = \frac{f(2+\varepsilon)-f(2)}{\varepsilon}$ que é igual a 4. Pronto!

Gil: Sim, isso mesmo. Entrega ao professor.

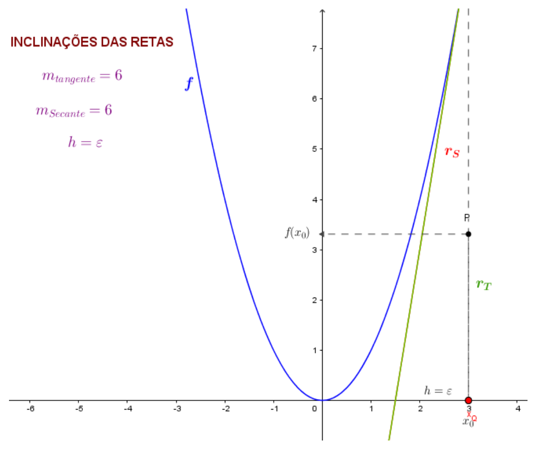
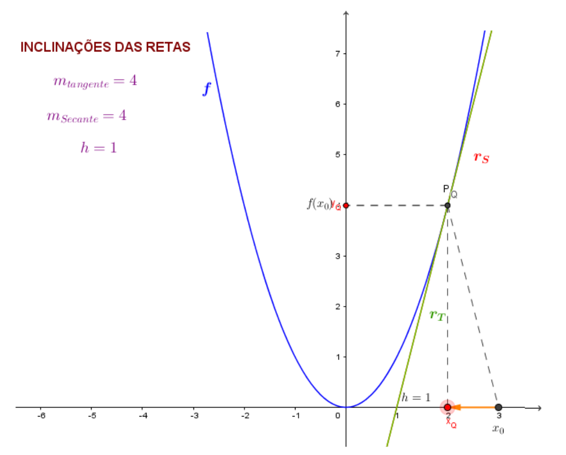
EXPLORAÇÃO 1: *APPLET* DO GEOGEBRA CONSTRUIDA PELO PAR GIL E MARIA	**EXPLORAÇÃO 2: *APPLET* DO GEOGEBRA CONSTRUIDA PELO PAR GIL E MARIA**
	

Figura 7.3.9 – Diálogo e exploração no GeoGebra do par Gil e Maria na resolução da Q_8T_{12}

Estes estudantes exploram juntos a *applet* do GeoGebra destinada a resolução da tarefa T_{12}. Começam por alterar o gráfico da função da *applet* por $f(x) = x^2$ e arrastar o seletor x de modo que $x_Q = 3$. Os efeitos dessas explorações permitiam-lhes concluírem inicialmente $m_T = 6$ uma vez visualizam na *applet* a reta r_S vertical e os valores $m_S =$

$m_T = 6$ e concluem “eu tenho uma reta vertical. O declive é 6” (Maria) e “O declive da tangente vai ser 6” (Gil). Entretanto, Maria identifica que o valor de $m_T = 6$ estava errado pois foi obtido a partir de construção geométrica assente em $x_0 = 3$ e não em $x_0 = 2$. Para corrigir esse erro, Gil tenta alterar o ponto $x_0 = 3$ para $x_0 = 2$, arrastando-o, sem sucesso, pois o ponto $P = (3, f(3))$ era fixo na *applet*. Maria decide então alterar as coordenadas desse ponto fazendo $P = (2{,}4)$ e arrastar o seletor x_Q fazendo $x_Q \to 2$, a fim de garantir a visualização da reta r_S em $x_0 = 2$.

Os efeitos dessas explorações, manifestadas pelas convergências do ponto $Q \to P$ e da reta $r_S \to r_T$ e visualização dos valores numéricos dos declives $m_S = 4$ e $m_T = 4$, permitiram esses estudantes concluírem que o valor do declive da reta tangente ao gráfico de f em $x = 2$ é $m_T = 4$, justificando com base nas explorações do GeoGebra, como se confirma nos excertos “É quatro, o $m_T = 4$. Mas porque é 4? (Maria) “Porque a gente usou o GeoGebra” (Gil).

Embora esses resultados confirmem que o GeoGebra possibilitou Gil e Maria resolverem geometricamente um problema de aplicação da taxa de variação instantânea, é possível inferir que as dificuldades apresentadas por estes estudantes no procedimento do cálculo algébrico da taxa de variação instantânea impediu-lhes de resolver o problema algebricamente, apresentando uma simbologia incorreta do declive m_T para justificar o valor encontrado geometricamente ao responderem “usando $m = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} \Rightarrow \frac{f(2+\varepsilon)-f(2)}{\varepsilon} = 4$”, à Q_8T_{12}.

O segundo contributo do GeoGebra na resolução da Q_8T_{12}, foi verificado nas explorações de *applets* do GeoGebra, realizadas por Vítor (par com Eliseu) e Jorge (par com Ismael), ao discutirem o procedimento algébrico adotado por Jorge na resolução dessa questão da tarefa. A visualização dos comportamentos dinâmicos da reta secante (r_S) aproximando-se à reta tangente (r_T) quando $h \to 0$, e das indicações dos valores de seus declives (m_S e m_T) apresentados nas *applets*, simultaneamente correlacionado aos registos algébricos das coordenadas dos pontos $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ e à representação algébrica de $m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, parecem ter possibilitado Jorge reconhecer seu erro no registo algébrico do declive da reta tangente ao gráfico de uma função no ponto.

Vítor: Você fez a questão 8? Eu estou com dúvida no que eu fiz.

Jorge: Usei essa fórmula aqui $\left[m_T = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right]$.

Vítor: Onde você colocou a $f(x) = x^2$ e o $x_0 = 2$ nessa relação?

Jorge: Aqui na $f(x)$ entraria o x^2 [aplica $f(x) = x^2$ em $m_T = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$].

Vítor: E quem é x_2?

Jorge: O x_2 é um outro ponto qualquer onde corta a secante. Como a secante é igual a tangente, não tem x_2 [visualiza $r_S = r_T$ na *applet*].

Vítor: Não, x_2 é o que se movimenta, certo? É o ponto Q. E as coordenadas de Q são $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. P será $(x_1, f(x_1))$ que é $(x_0, f(x_0))$[identifica as coordenadas de Q e P].

Jorge: Aqui [indica que $r_S \cong r_T$] a gente está falando só do P, ou seja o P não tem x_2 [indica na *applet* o ponto de tangência $P(x_0, f(x_0))$] Por isso que vai ficar só $\frac{f(x_0)}{x_0}$ [indica que $m_T = \frac{f(x_0)}{x_0}$ após ter considerado que $x_2 = f(x_2) = 0$].

Vítor: Mas é o limite dessa relação $\left[\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right]$, quando h tende a zero, que dá essa relação aqui m_T.

Jorge: Então, mas como a gente está falando da tangente, não tem o segundo ponto, não tem o x_2. Entendeu? A gente só tem o x_1, que é x_0. Pode olhar a qui oh! [Visualiza r_S coincidindo com r_T] A tangente só toca num ponto, ou seja, isso aqui é zero [indica que $x_2 = f(x_2) = 0$].

No diálogo, verifica-se que Vítor pergunta a Jorge como foi que resolveu a questão 8 , uma vez que não estava conseguindo resolvê-la juntamente com seu par Eliseu. Ao respondê-lo, Jorge relata que se baseou na expressão $m_T = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ para descrever algebricamente o declive da reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $x = x_0$, tendo aplicado nela $f(x) = x^2$e $x_0 = 2$. Os excertos "Como a secante é igual a tangente, não tem x_2 Aqui a gente está falando só do $P(x_0, f(x_0))$" e "pode olhar aqui oh! [Visualiza r_S coincidindo com r_T] A tangente só toca num ponto, ou seja isso aqui é zero [indica que $x_2 = f(x_2) = 0$]" revelam que esse estudante recorreu à visualização do registo geométrico de r_T no ponto P de tangência e da convergência $r_S \to r_T$ na *applet* do GeoGebra, gerados por arrastamentos do seletor x_Q de modo que $h \to 0$, para justificar que declive da reta tangente é expresso pela relação $m_T = \frac{f(x_0)}{x_0}$ pelo facto de só r_S coincidir com só r_T $(r_S = r_T)$ e intercetar o gráfico de $f(x) = x^2$ apenas no ponto P.

Vítor identificou o erro na resolução de Jorge causado por suprimir as coordenadas $(x_2, f(x_2))$ da expressão geral do declive de r_T $\left[m_T = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right]$ e expressá-la por

$m = \frac{f(x_0)}{x_0}$ quando $r_S \cong r_T$. Esclareceu-lhe que as coordenadas suprimidas correspondem às coordenadas de Q, e que o declive m_T é obtido a partir da convergência de $Q \to P$ na passagem ao limite ($h \to 0$), encaminhando a escrita da expressão algébrica que o define, nomeadamente, $m_T = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

> **Vítor:** Não! Não pode ser! Para eu calcular o declive da tangente eu tenho que calcular o limite de $Q \to P$ [simula $r_S \to r_T$ e escreve $m_T = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$] (…) Porque vai ficar $m_T = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ com $x_0 = 2$. Vai ficar $m_T = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+0)-f(2)}{0} = \frac{4-4}{0} = \frac{0}{0}$. Vai dar $\frac{0}{0}$.
>
> **Jorge:** Vai ficar indeterminação?
>
> **Vítor:** Exatamente! Aí, a partir daí, já não sei mais. Isso aí que está pegando.
>
> **Jorge:** Nossa, você está certo! Você está certo, pois a partir daí [indica $m_T = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$], os valores que ele vai dar para a gente fazer as contas (refere-se a $f(x) = x^2$ e $x_0 = 2$), é que a gente vai usar para fazer as factorações e os cortes.

A partir dessa exposição de Vítor, tendo recorrido a visualização dinâmica de $r_S \to r_T$ quando $h \to 0$ e aos registos algébricos das coordenadas dos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$, Jorge reconhece o seu erro em considerar $m_T = \frac{f(x_0)}{x_0}$. Conforme observado no excerto "Nossa, você está certo! … pois a partir daí [indica $m_T = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$] … é que a gente vai usar para fazer as factorizações e os cortes" ele admite que a expressão $m_T = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ expressa corretamente o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0, na qual precisa ser aplicada as condições do problema para resolvê-lo corretamente. Por falta de tempo esses estudantes não conseguiram resolver essa questão mantendo como resposta a Q_8T_{12} sua resolução anterior (figura 7.3.10).

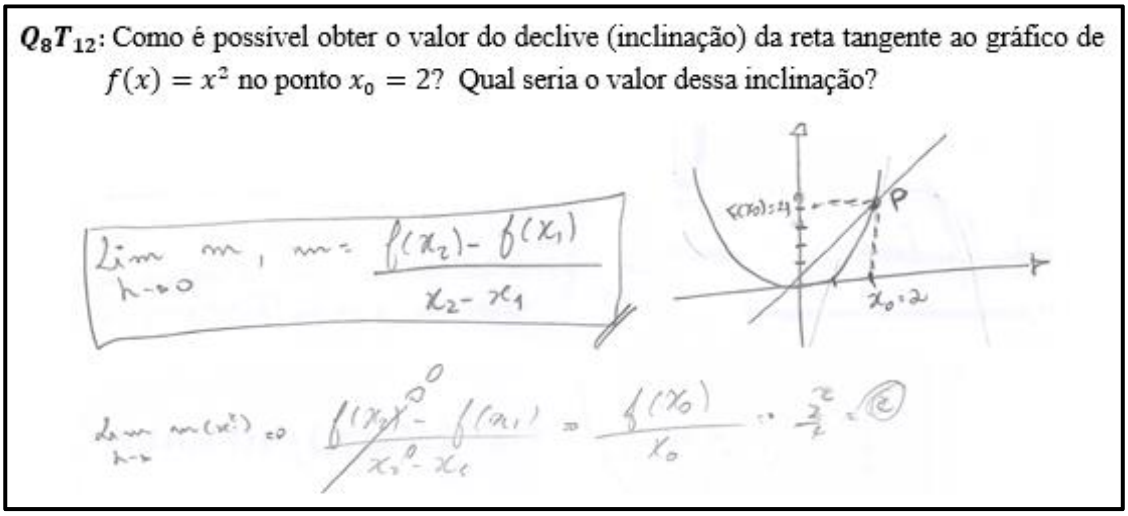


Figura 7.3.10 – Resposta do par Jorge e Ismael à Q_8T_{12}

Embora esses resultados apresentados na análise da Q_8T_{12} revelem dificuldades da maioria dos estudantes na aprendizagem da taxa de variação instantânea de uma função no ponto x_0 associada ao cálculo algébrico do declive da reta tangente ao gráfico de uma função no ponto, verifica-se que estas dificuldades foram superadas pela generalidade dos estudantes. De facto, nas questões (Q_8 e Q_{10})T_{14}, em que os estudantes deveriam aplicar conhecimentos sobre a taxa de variação instantânea de uma função para resolver um problema de otimização, nomeadamente, determinar o volume máximo e as medidas de uma caixa de formato paralelepípedo, verifica-se que apenas o par Gil e Maria não conseguiu resolvê-las corretamente. Este par apresentou resposta incompleta à Q_8T_{14} e não respondeu a $Q_{10}T_{14}$ (figura 7.3.11), evidenciando fragilidade no domínio da Álgebra, embora evidencie ter reconhecido que o declive da reta tangente no ponto máximo da função é obtido pela expressão $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$.

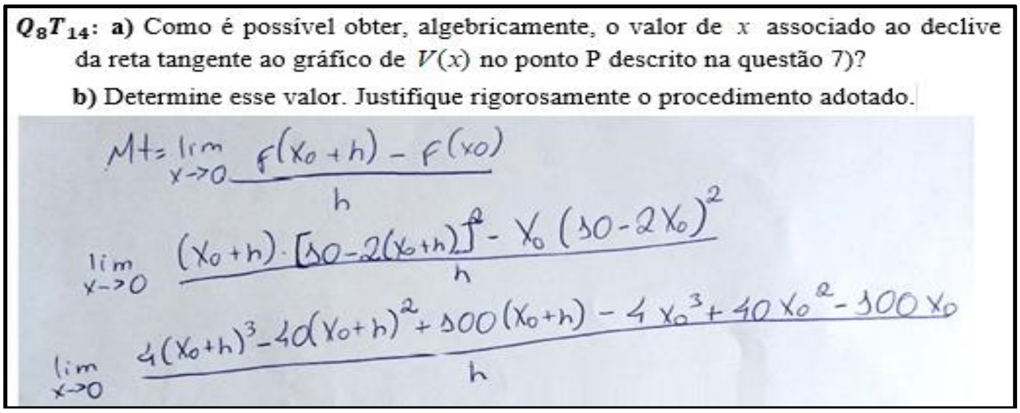


Figura 7.3.11 – Resposta do par Gil e Maria às questões Q_8T_{14}

Os dados revelam que estes estudantes começaram por fazer várias tentativas de cálculo $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, sem sucesso, substituindo $x = 1.67$ e $h = 0$. Sendo direcionados pelo professor, através de questionamentos, conseguiram conceber que deveriam resolver $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$ substituindo $V(x) = x(10 - 2x)^2$ e aplicar o $h \to 0$ após eliminados os termos comuns na fração algébrica. Contudo, apresentaram dificuldade no desenvolvimento de $(10 - 2x)^3$, na manipulação dos termos algébricos, factorização de raízes como forma de eliminar os termos comuns e simplificar a fração algébrica para o cálculo do limite. Essas dificuldades os impediram de calcular algebricamente o limite e os levaram a desistir de resolver os dois itens da Q_8T_{14}, apresentando como resposta apenas o registo algébrico inicial do desenvolvimento de $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, como pode-se perceber na transcrição de trechos do seu diálogo na resolução da Q_8T_{14}.

Gil: Tá confuso, vou largar [tenta resolver $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$].

Maria: Ai meu Deus! Não estou conseguindo, não está dando. Está tudo errado! Vamos voltar pra cá. […] Agora, como é que ele desenvolveu aquilo lá? Porque se eu soubesse, desenvolveria essa aqui [refere-se a $(10 - 2x)^3$]. Está bem, o primeiro é elevado ao cubo …. Vamos lá 10^2 menos $2 \times 10 \times (2x_0 + h) + 4(x_0 + h)^2$ ... Como é que eu vou somar $x_0 + h$?

Gil: Maria não tem esse parêntese aqui não [refere-se ao fator $x_0 + h$ do produto]. Escuta o que eu estou te falando …

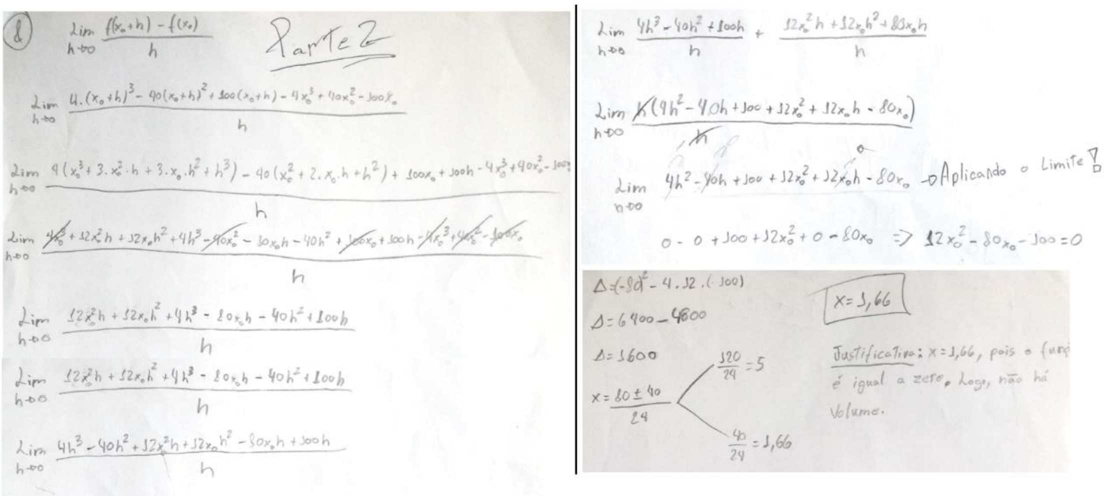
Maria: Por favor professor, explica para este menino que tem um parêntese aqui no $(x_0 + h)$ vezes aquela conta toda que deu [professor concorda] … chega, chega, chega. Não dá mais. Meu Deus!

A fragilidade revelada por esses estudantes no domínio dos procedimentos da Álgebra, associado ao cálculo de limite, impediu-lhes de resolverem corretamente $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$, obter o valor de x que maximiza a função V e determinar as medidas e o volume da caixa maximizada. Ademais, observa-se que essas dificuldades os levaram a desistirem de resolver os dois itens da Q_8T_{14}, apresentando como resposta apenas o registo algébrico inicial do desenvolvimento de $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$,

Os demais cinco pares de estudantes conseguiram mobilizar conhecimentos sobre limite para obter algebricamente o valor de x associado ao declive da reta tangente ao gráfico de V no seu ponto máximo, e usá-lo para determinar as medidas da caixa e seu volume máximo. Estes estudantes mobilizaram conhecimentos prévios sobre a taxa de variação instantânea para expressar o declive da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto e escrever corretamente a equação $m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$, que permite calcular o referido valor de x. Para resolvê-la, aplicaram corretamente o cálculo de limite, realizando manipulação algébrica com uso de produtos notáveis, factorização de polinómios e simplificação da fração algébrica para resolver o caso $\frac{0}{0}$ de indeterminação de limite, encontrando uma equação polinomial do 2º grau para obter o valor de x produz o volume máximo da caixa, tendo-o substituído nas expressões algébricas das dimensões e volume da caixa para encontrar suas respetivas medidas, como exemplificado pela resposta de André e Jorge às $(Q_8$ e $Q_{10})T_{14}$ (figura 7.3.12).

$\boldsymbol{Q_8 T_{14}}$: **a)** Como é possível obter, algebricamente, o valor de x associado ao declive da reta tangente ao gráfico de $V(x)$ no ponto P descrito na questão 7)?

b) Determine esse valor. Justifique rigorosamente o procedimento adotado.



$\boldsymbol{Q_{10} T_{14}}$: Qual é o volume máximo que a caixa pode ter? Quais as dimensões da caixa de volume máximo?

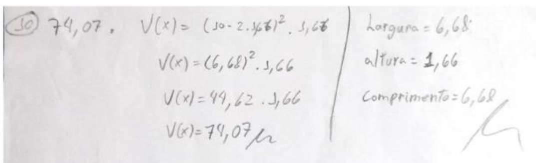


Figura 7.3.12 – Resposta do par André e Jorge às questões $(Q_8$ e $Q_{10})T_{14}$

A resposta apresenta registos algébricos que evidenciam um domínio desses estudantes nos procedimentos de cálculo algébricos do conceito de limite (produtos notáveis, factorização de polinómios e simplificação algébrica) para resolver $m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ tendo sido capazes de reconhecer e resolver corretamente uma indeterminação de limite do tipo $\frac{0}{0}$. Para além disso, resolvem corretamente a equação ($12x_0^2 - 80x - 100 = 0$), para determinar o valor da abscissa x do ponto máximo da função V (aproxima por $x = 1{,}66$), tendo desconsiderado corretamente a raiz desta equação que não satisfaz as condições do problema ($x = 5$), pois justifica “a função no $x = 5$ é igual a zero. Logo não há volume”. Por fim, substituem $x = 1{,}66$ nas expressões algébricas das dimensões da caixa ($10 - 2x$, $10 - 2x$ e x) e $V(x)$, para determinar uma aproximação ideal das medidas das dimensões (6,68, 6,68 e 1,66) e do volume (74,07) da caixa maximizada e responder a $Q_{10}T_{14}$.

Para além disso, verifica-se que as explorações na *applet* do GeoGebra do ponto $P = (x, V(x))$ e da representação geométrica da reta tangente ao gráfico de V, correlacionados aos registos algébricos da resolução de $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 0$ parecem ter favorecido o delinear de estratégia correta de resolução algébrica do valor de x e a determinação das medidas das dimensões da caixa de volume máximo, como observado na sequência de diálogos do par Miguel e Pedro, a seguir (figura 7.3.13):

Pedro: Como é possível obter, algebricamente, o valor de x … (Lê Q_8). Ele quer achar este valor aqui [indica $x = 1{,}67$ após ter arrastado o seletor x a fim de que $P = (x, V(x))$ seja o máximo da função V].
Miguel: É igualar isso tudo a zero né? (Pedro concorda) É, tem de igualar isso aqui a zero! Vai ficar $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 0$, confere? m_T não é a inclinação? A inclinação vai ser zero, óh … [indica o registo geométrico horizontal de r_T na *applet*).
Pedro: Ali, no caso, $f(x_0)$ é o valor de $V(x_0)$ né?
Miguel: Vamos lá, $\frac{4x^3 - 40x^2 + 100x + h - 4x^3 + 40x^2 - 100x}{h}$
Vai zerar tudo e ficar $\frac{h}{h}$. Estamos perdidos!

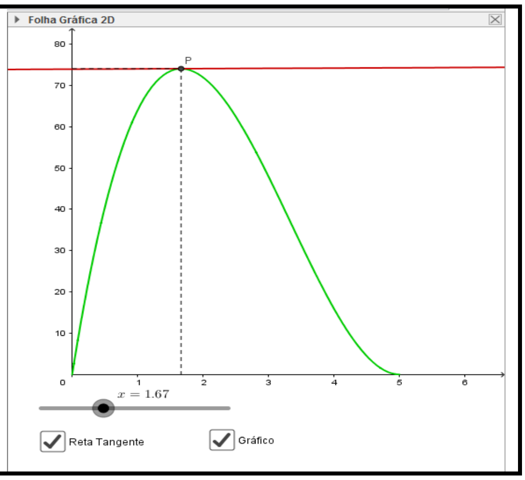


Figura 7.3.13 – Diálogo e exploração no GeoGebra de Pedro e Miguel na resolução da Q_8T_{14}

Estes estudantes realizam juntos explorações na *applet* do Goegebra a fim de encontrar o procedimento algébrico que permite determinar o valor de x que maximiza o volume da caixa ($Q_{8.a)}$). Arrastam o seletor x como forma de posicionar o ponto $P = \big(x, V(x)\big)$ no máximo do gráfico da função V. Os efeitos dessas explorações, nomeadamente, do registo geométrico horizontal de r_T correlacionado ao ponto $(1{,}67, V(1{,}67)$ ajudaram-lhes a (i) reconhecer que era preciso igualar o declive (m_T) da reta tangente a zero para resolver o problema, já que, após essas explorações na *applet* Miguel conclui: "É igualar isso tudo a zero né? (Pedro concorda) … m_T não é a inclinação? A inclinação vai ser zero" sendo acompanhado por Pedro na sua conclusão, e (ii) delinear corretamente o procedimento de obtenção do valor de x, indicando a resolução da equação $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$. Entretanto, ao resolver esta equação, Miguel comete erro no desenvolvimento de $f(x+h)$, fazendo $f(x) + h\,(4x^3 - 40x^2 + 100x + h)$, o qual o impediu de progredir corretamente na sua resolução e encontrar o valor de x. Os estudantes decidem analisar novamente questão Q_8.

> **Pedro:** Como é possível obter … [Lê Q_8]. Dessa reta aqui, certo? [indica na *applet* a reta tangente no ponto de máximo]. Se ela é paralela ao eixo x no ponto P [visualização de r_T quando é interrompido por Miguel].
>
> **Miguel:** Ele quer saber o valor de x que leva ao ponto de máximo [visualização de $P(x, V(x))$ no máximo de V]. Então é aquele valor 1.667… em outras palavras ele quer o valor de x quando o volume é máximo.
>
> **Pedro:** Você vai ter de igualar esse gráfico [indica a expressão algébrica $V(x)$] com essa reta aqui, pois ela está tocando no gráfico. Se você pegar esse gráfico daqui [gráfico de V] e igualar com o gráfico de cima [gráfico de r_T], os dois gráficos vão se juntar.
>
> **Miguel:** Sim, mas que gráfico é esse? [refere-se a lei da reta tangente].
>
> **Pedro:** É um ponto P. [Miguel ri pois acha estranho] Aqui embaixo você tem o gráfico de $V(x)$ e aqui em cima, vai ser só P. Então iguala a P. Fica assim $4x^3 - 40x^2 + 100x = P$. [pausa] Agora não sei mais. [pausa]

O diálogo anterior revela que os estudantes recorreram ao GeoGebra para apoiar seus raciocínios a fim de encontrar uma estratégia resolução algébrica do valor de x. Apoiado na visualização do registo geométrico de r_T no gráfico de V, coincidindo com o ponto de máximo $P = (x, V(x))$, Pedro sugere igualar as expressões analíticas da função V e da reta tangente r_T, justificando a coincidência de seus gráficos no ponto máximo da função. Associa erradamente a expressão analítica de r_T ao ponto P e escreve a equação "$4x^3 - 40x^2 + 100x + h = P$", desistindo de resolvê-la após ter percebido algo de errado. Em meio a essa dificuldade, Miguel exclama:

> **Miguel:** Caramba, não acredito! Olha aqui, óoo. Agora vai ... [começa a escrever] $f(x+h)$ é igual a $V(x+h)$. Olha aqui, $V(x)$ é quanto? É $4x^3 - 40x^2 + 100x$ certo? [Pedro concorda] Agora, $m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Então é só substituir, óh: 4 que multiplica $x + h$ ao cubo [faz $4(x+h)^3$] menos […]. No lugar do x faz $x + h$.
>
> **Pedro:** Ah! Correto. […] [resolvem juntos a equação $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$].

Miguel consegue superar sua dificuldade inicial no desenvolvimento algébrico de $f(x+h)$ após ter recorrido várias vezes ao registo geométrico horizontal da r_T na *applet* e à tradução algébrica de seu declive $\left(m_T = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$ para apoiar seu raciocínio e encontrar o procedimento de obtenção do x. Juntos, os estudantes foram capazes de determinar algebricamente o valor de x que corresponde ao declive da reta tangente ao gráfico de V, no seu ponto máximo e usá-lo para determinar as medidas da caixa e seu volume (figura 7.3.13).

7.3.3. Síntese

Em síntese, a análise dos dados mostra que a generalidade dos estudantes foram capazes de aplicar os seus conhecimentos sobre o conceito de limite para analisar corretamente proposições matemáticas, que envolve a aplicação da condição de existência do $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e conhecimentos sobre a sua definição formal, validando-as ou justificando as incorreções nelas presentes. À vista disso, verifica-se que os estudantes utilizaram corretamente a condição de existência do limite (igualdade dos limites laterais), realizando corretamente procedimentos do cálculo algébrico de limite para analisar o comportamento das imagens $f(x)$ de uma função f na vizinhança de $x_0 = 3$, e identificar, corrigir e justificar o erro de uma afirmação sobre a existência do $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Ademais, identificam expressões algébricas que definem corretamente o limite, ou justificam incorreções nelas presentes, fazendo uso correto dos quantificadores e da relação implicativa entre as desigualdades $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - L| < \varepsilon$ ou $f(x) < A$ na definição formal do limite, evidenciando um conhecimento adequado da mesma, necessária à compreensão de limite.

Também conseguiram resolver problemas que envolvem a aplicação da taxa de variação instantânea de uma função f no ponto x_0 $\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$. No início de sua aprendizagem (tarefa T_{12}), a maioria dos estudantes evidencia dificuldades quando não foram capazes de aplicá-la para determinar o declive da reta tangente ao gráfico de uma função. Sobre este aspeto, observa-se que as incorreções no seu registo algébrico $\left(\text{ex.} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0)}{x_0} \text{ ou somente } \frac{f(x_0)}{x_0}\right)$, causado por conhecimentos incorretos da reta tangente como a reta que corta o gráfico em apenas um ponto e/ou fragilidade nos procedimentos do cálculo algébrico do limite, como a manipulação das expressões algébricas, factorização e simplificação de frações algébricas, contribuíram para que a maioria dos estudantes não conseguissem determinar algebricamente o declive da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $x = 2$.

Entretanto, essas dificuldades iniciais parecem ter sido superadas pela generalidade dos estudantes na tarefa T_{14}, pois quase todos os pares de estudantes foram capazes de aplicar a taxa de variação instantânea para resolver um problema de otimização, que envolvia a resolução de equação $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$ para determinar o volume máximo e as medidas de uma caixa de formato paralelepípedo.

No que concerne ao papel do GeoGebra na resolução dos referidos problemas, na tarefa T_{12}, há evidências de que as explorações de arrastamentos do seletor x_Q e do ponto $Q = (x_Q, f(x_Q))$, e a visualização dos seus efeitos dinâmicos, nomeadamente, de registos geométricos ou numéricos das convergências $r_S \to r_T$, $m_S \to m_T$ e $Q \to P$ no gráfico de uma função, terão favorecido a resolução geométrica do problema que consistia em determinar o valor do declive da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ em $x = 2$ e o reconhecimento de erros no procedimento de sua resolução algébrica.

Já na tarefa T_{14}, observou-se que o uso do GeoGebra permitiu delinear a estratégia correta de resolução algébrica do valor de x (corte da planificação da caixa de formato paralelepípedo) e a determinação das medidas das dimensões da caixa de volume máximo. Esse contributo é resultado de explorações na *applet* que permitiram a realização de testes experimentais do posicionamento de ponto $P(x, f(x))$ e do registo geométrico de r_T no gráfico da função V, os quais revelam terem potencializado a tradução algébrica do declive da reta tangente ao gráfico de V, no seu ponto máximo por $\lim_{h\to 0} \frac{V(x_0+h)-V(x_0)}{h} = 0$ e processos de raciocínio associados ao cálculo de limite, pois os estudantes recorreram várias vezes ao registo geométrico horizontal da r_T na *applet* e a expressão $m_T = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ para apoiar o seu raciocínio na resolução da equação $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$ e encontrar o x e as medidas das dimensões da caixa de volume máximo.

Capítulo 8

Análise da compreensão do conceito de continuidade de funções

Neste capítulo apresento os resultados da análise dos dados, focada na compreensão do conceito de continuidade. Começo por apresentar a análise dos significados atribuídos pelos estudantes ao conceito de continuidade. A seguir, apresento uma descrição do trabalho com diferentes representações deste conceito e que foi analisado com base em três ações, nomeadamente, reconhecer, representar e transformar (tratamentos e conversões) a continuidade. Por fim, analiso os conhecimentos mobilizados pelos estudantes para resolver problemas que envolvem analisar proposições algébricas que envolvem este conceito, provando-as ou justificando as incorreções nelas presentes e resolver problemas que apelam à modelação matemática e requer a aplicação dos critérios de continuidade ou do TVI.

8.1. Significados atribuídos ao conceito de continuidade

8.1.1. Significado da continuidade local e global de uma função

Nesta secção analiso os significados que os estudantes revelam do conceito de continuidade, a partir dos seus *conceito-imagem evocado* e *conceito-definição*. Os significados que os estudantes atribuem ao conceito de continuidade foram analisados em questões onde os estudantes eram solicitados a explicar a (des)continuidade do gráfico de uma função, quando justificam a (des)continuidade de uma função representada geometricamente e ao decidir sobre a definição formal de continuidade de uma função.

Os dados revelam que no início da aprendizagem do conceito de continuidade os estudantes possuem uma conceção intuitiva de função contínua associada à *função cujo gráfico não possui interrupções* ou à função que *a cada ponto do seu domínio associa uma imagem* como se observa na interpretação que fazem do gráfico por eles apresentado na Q_1T_{13}, quando solicitados a descreverem uma função contínua. Esta conclusão é baseada na análise das resoluções da Q_2T_{13}, onde os estudantes foram indagados a explicarem o porquê de o gráfico representar uma função contínua.

Verifica-se nas respostas dos estudantes, que três dos seis grupos apresentaram conceitos imagem conflitantes associados ao significado de função contínua como *a função cujo gráfico não possui interrupções*. Nas suas respostas, as expressões verbais "não há interrupção", "mesmo comportamento" e "não dá saltos" são usados para traduzir a noção clássica de função continua como aquela em que o seu gráfico pode ser traçado sem que se tire o lápis do papel, conforme exemplificado na resposta de Ismael e Jorge (Q_2T_{13}): "Pois não há nenhum tipo de interrupção no gráfico".

Os demais três grupos apresentaram conceitos imagem, igualmente conflitantes, ao atribuírem à função contínua o significado de uma função que *cada ponto do seu domínio tem uma imagem.* Esses grupos basearam-se na *associação* entre dois objetos, x e $f(x)$ $\left(x \in D_f\right)$, para explicar a continuidade da função, indicando que *cada* valor de x está associado a um único valor de $f(x)$, o que revela uma conceção parcial de continuidade de uma função baseada na noção do conceito de função, não se apercebendo da diferença entre estes dois conceitos. Isso mesmo é observado na resposta do trio André, Eliseu e Vítor (Q_2T_{13}) "*Para cada ponto do domínio, corresponde um no contradomínio. Para cada x tenho* $f(x)$".

Uma vez que não possuíam conhecimento académico do conceito de continuidade, possivelmente essas conceções intuitivas sobre uma função contínua, resultam de significado do quotidiano dos estudantes sobre o termo 'contínuo'. Essas significados são mobilizados pelos mesmos grupos de estudantes para analisar gráficos de funções e decidir sobre sua (des)continuidade em $\mathbb{R}$. Por exemplo, os grupos que na Q_2T_{13} apresentaram conceitos imagem atribuindo à função continua o significado de *função cujo gráfico não possui interrupções*, os mobilizaram para resolver a Q_3T_{13}, interpretando os gráficos das funções, a partir de características que revelam que todas as partes do traçado do gráfico se liguem umas às outras sem interrupção. Esta conclusão pode ser verificada na resposta do par Ismael e Jorge à Q_3T_{13} (figura 8.1.1).

$\boldsymbol{f_1}$: Não é contínua. Pois o gráfico é interrompido quando $x = 1$, ou seja, o gráfico não é definido no mesmo.
$\boldsymbol{f_2}$: Não é contínua. Pois há um salto na função, ou seja, o gráfico é interrompido no ponto $x = 1$.
$\boldsymbol{f_3}$: Não é contínua. Pois, apesar de parecer que o gráfico ocupa todos os pontos, ele não toca no ponto $x = 1$.
$\boldsymbol{f_4}$: Sim. Pois para todo x existe um y , ou seja, não há interrupções.
$\boldsymbol{f_5}$: Não. Pois o gráfico não se toca no ponto $x = 1$, apesar de estar definido.

Figura 8.1.1 - Transcrição da reposta apresentada por Ismael e Jorge à Q_3T_{13}

Os excertos da resposta deste par de estudantes "o gráfico é interrompido" (f_1 e f_2), "ele não toca no ponto" (f_3), "não há interrupções" (f_4) e "o gráfico não se toca"(f_5) revelam que pontos não definidos (representado por bola aberta no gráfico da função f_1), saltos no gráfico (f_2), comportamentos laterais infinitos (f_3) e oscilações gráficas (f_5) são consideradas por eles como 'interrupções' do gráfico da função, caracterizando assim uma função descontínua. No caso em que o gráfico da função apresenta um "traçado uniforme" (f_4), a função é considerada contínua.

Os três pares de estudantes que na Q_2T_{13} atribuíram à função contínua o significado de função que *a cada ponto do seu domínio está associada uma imagem*, também mobilizaram os conceitos imagem associados a este significado, combinando-os com conhecimentos prévios de características gráficas de funções contínuas, para analisar gráficos das funções, tal como se observa na resposta de Gil e Maria à Q_3T_{13} (figura 8.1.2)

$\boldsymbol{f_1}$: Não é contínua, pois no ponto $x = 1$ não existe $f(x)$.
$\boldsymbol{f_2}$: É contínua, pois existe $f(x)$ para todos os valores atribuídos a x , mesmo que a função dê um salto.
$\boldsymbol{f_3}$: É contínua, pois, para qualquer valor atribuído a x existe $f(x)$ e quando $x = 1$ $f(x) = 0$.
$\boldsymbol{f_4}$: É contínua, mesmo para valores de $x > 1$ há sempre $f(x)$ para todo x.
$\boldsymbol{f_5}$: Não é contínua, pois há um espaço entre $x > 1$ e $x = 1$ que não deixa o gráfico apresentar valores de $f(x)$ para valores de x que estejam neste intervalo.

Figura 8.1.2 - Transcrição da reposta apresentada por Gil e Maria à Q_3T_{13}

As expressões verbais sublinhadas na resposta deste par de estudantes revelam sua conceção de que para a continuidade de uma função ser estabelecida é preciso unicamente que os valores de x assumam uma imagem no gráfico. Contudo, evidencia-se que esta conceção limitada de continuidade os conduziu ao erro de considerar como função contínua os casos em que o gráfico da função apresenta saltos (f_2) e comportamentos laterais infinitos (f_3).

No decorrer das aulas, estas conceções intuitivas sobre a continuidade de uma função foram atualizadas por conceções formais à medida que os estudantes resolvem as demais questões da tarefa T_{13}, tendo de realizar explorações numa *applet* do GeoGebra, que continha a representação geométrica de uma função contínua. Sob esse aspeto, aponto que os estudantes realizaram explorações de seletores $A = f(2)$ e k, cujos efeitos envolviam deslocamentos do ponto $(2, f(2))$ e do comportamento gráfico lateral da função f_k numa vizinhança de $x_0 = 2$ $\left(\lim_{x \to 2^-} f_k(x)\right)$, a fim de analisar a (des)continuidade de f_k em $x_0 = 2$. A análise dos efeitos dessas explorações permitiu os estudantes desenvolverem conceitos imagem da continuidade de uma função associada *à existência do limite no ponto* ou *à igualdade* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Por exemplo, o par Gil e Maria evidenciou ter desenvolvido conceitos imagem da continuidade de uma função associada *à existência do limite no ponto*, a partir das explorações que realizou na *applet*, como se confirma no diálogo deste par na resolução da Q_6T_{13}, na figura 8.1.3.

Maria: Será que é quando existe limite? [depois de ter feito $f_k(2) = 7$ e $k = 0{,}5$ e analisado o gráfico de f_k na *applet*].

Gil: Não sei.

Maria: Porque olha só o que ele fala aqui [Lê Q_5T_{13}]. Comportamento em torno de $x_0 = 2$ é limite. Então para haver continuidade tem que haver o limite no ponto. É isso? Mesmo comportamento lateral para os valores de x em torno de $x_0 = 2$ [pausa].

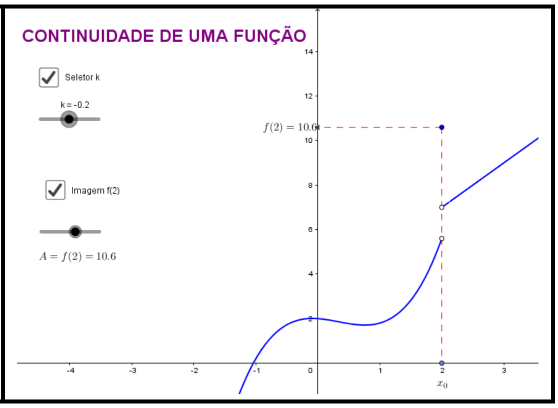


Figura 8.1.3 – Diálogo e exploração no GeoGebra do par Gil e Maria à $(Q_6\ e\ Q_7)T_{13}$

No diálogo, é possível observar que a visualização das explorações realizadas ajudou Maria a identificar que o limite é a condição para que a função seja contínua em $x_0 = 2$, pois ela realiza modificações nos seletores k e $A = f_k(2)$ na *applet* de forma a obter $f_k(2) = 7$ e $k = 0{,}5$, visualiza que o gráfico não apresenta interrupções, e conclui que para "haver continuidade tem que existir o limite no ponto". Na sequência desse diálogo, Maria solicita esclarecimento ao professor quanto a veracidade de sua conclusão:

Maria: Professor! Aqui diz que é o comportamento em torno de $x_0 = 2$. Ou seja, isso aqui, eu teria que fazer... Pronto! [modifica o valor de k e $A = f_k(2)$, e faz $f_k(2) = 7$ e $k = 0{,}5$]. Aqui vai haver o limite [mostra o $\lim_{x\to 2} f_k(x) = 7$ na *applet*]. É quando o gráfico fica contínuo. Então para haver continuidade tem que existir o limite no ponto! Então quando existe o limite há continuidade?

Professor: Escreve isso pois você poderá usar na Q_7T_{13}. É isso que você concluiu desta exploração?

Maria: Sim, segundo isto que eu constatei aqui [indica o gráfico de f_k em $x_0 = 2$].

Torna-se evidente nesse diálogo que a conceção de Maria da continuidade de uma função associada *à existência do limite no ponto* foi desenvolvida com base nas explorações do GeoGebra, pois faz $f_k(2) = 7$ e $k = 0{,}5$ na *applet*, reconhece a existência $\lim_{x\to 2} f_k(x) = 7$ e concluir: "Então para haver continuidade tem que existir o limite no ponto!" Ao ser questionada pelo professor se sua conceção resultou das explorações da *applet* do GeoGebra, Maria responde: "Sim, segundo isto que eu constatei aqui [indica o gráfico de f_k numa vizinha de $x_0 = 2$]".

Outros cinco grupos de estudantes revelaram terem desenvolvido conceitos imagem da continuidade de uma função associada *à igualdade* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, a partir das explorações na *applet* do GeoGebra, tal como exemplificado no diálogo do par Fátima e Miriam na resolução da Q_6T_{13} (figura 8.1.4).

Miriam: Através de diversas … [lê a Q_5T_{13}]. Com o mesmo comportamento lateral? [faz $f_k(2) = 7$] E agora Fátima?

Fátima: Assim, olha [modifica seletor k até obter $\lim_{x\to 2^+} f_k(x) = 7$]

Miriam: Ah é, $k = 0{,}5$ [lê Q_6T_{13}]. A uniformidade aqui é que o limite vai ser igual a $f(x_0)$. [visualiza $\lim_{x\to 2} f_k(x) = f_k(2)$ na *applet*]

Fátima: Isso.

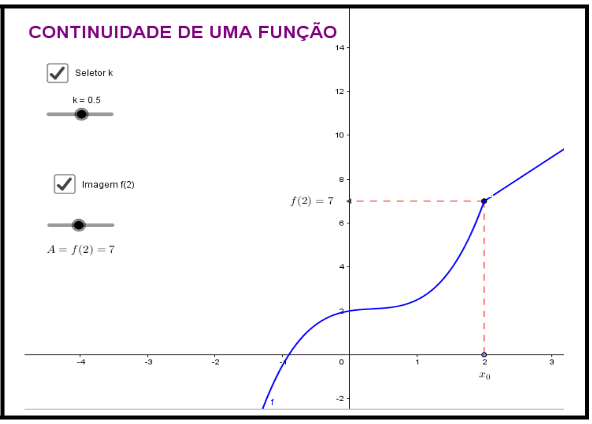


Figura 8.1.4 – Diálogo e exploração no GeoGebra do par Fátima e Miriam à $(Q_6\ e\ Q_7)T_{13}$

No diálogo, Fátima e Miriam realizam simulações na *applet* para determinar o valor de k que produz o comportamento sem interrupções do gráfico da função f_k em torno de $x_0 = 2$. Modificam os seletores $A = f_k(2)$ e k de modo a obter o ponto $(2{,}7)$ e $\lim_{x\to 2^+} f_k(x) = 7$, encontrando $k = 0{,}5$. Para decidir sobre a continuidade, Miriam recorre à visualização do gráfico da função f_k na *applet*, o que lhe permitiu desenvolver conceitos imagem de continuidade de uma função associada *à igualdade* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ao concluir "a uniformidade [continuidade] aqui é que o limite vai ser igual a $f(x_0)$", sendo acompanhada por Fátima na sua conclusão.

Após esta experiência, na Q_8T_{13}, os estudantes foram desafiados a analisar gráficos de funções e a decidir sobre a sua (des)continuidade em $\mathbb{R}$. Os resultados revelam que na análise dos gráficos, quatro grupos de estudantes apresentaram conceitos imagem associados ao significado de continuidade local como *resultado da igualdade* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Estes estudantes analisaram o comportamento do gráfico da função numa vizinhança de $x = 1$, verificaram a existência e o possível valor de $f(1)$ e do $\lim_{x \to 1} f(x)$, e aplicaram os critérios de continuidade local para concluir sobre a continuidade da função. Saliento, ainda, que todos esses pares alteraram as suas conceções intuitivas iniciais sobre a continuidade de função, tal como se verifica na transcrição de suas respostas apresentadas à Q_8T_{13} (figura 8.1.5).

Resposta da Q_3T_{13}	**Resposta da Q_8T_{13}**
$\boldsymbol{f_1}$: Não é contínua. Pois o gráfico é interrompido quando $x = 1$, ou seja, o gráfico não é definido no mesmo. (Ismael e Jorge)	$\boldsymbol{f_1}$: Existe limite, porém não está definida. Logo não é contínua. (Ismael e Jorge)
$\boldsymbol{f_2}$: Não pois a função não existe do ponto $y = 2$ até $y < 3$. (Fátima e Miriam)	$\boldsymbol{f_2}$: Não pois não existe limite no ponto $x_0 = 1$. (Fátima e Miriam)
$\boldsymbol{f_3}$: Não é contínua porque no ponto $x = 1$ não possui imagem. (Cláudio e Pedro)	$\boldsymbol{f_3}$: Não é contínua, os limites laterais são diferentes e a função não está definida no ponto $x = 1$. (Cláudio e Pedro)
$\boldsymbol{f_4}$: É contínua pois a função tem o mesmo comportamento até o infinito. (Miguel e Paulo)	$\boldsymbol{f_4}$: É contínua, pois $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$ (Miguel e Paulo)
$\boldsymbol{f_5}$: Não. pois o gráfico não se toca no ponto $x = 1$, apesar de estar definido. (Ismael e Jorge)	$\boldsymbol{f_5}$: Há um limite, porém há um salto na função, ou seja, não está definida. Logo não é contínua. (Ismael e Jorge)

Figura 8.1.5 – Extrato de respostas dos estudantes às questões $(Q_3$ e $Q_8)T_{13}$

Nas respostas apresentadas, os excertos "gráfico é interrompido quando $x = 1$" (Ismael e Jorge), o mesmo comportamento (Miguel e Paulo) e "gráfico não se toca no ponto $x = 1$, apesar de estar definido" (Ismael e Jorge) revelam que os estudantes apresentaram conceitos imagem de função contínua associados *a função cujo gráfico não possui interrupções,* enquanto que os excertos "função não existe do ponto $y = 2$" (Fátima e Miriam) e "no ponto $x = 1$ não possui imagem" (Cláudio e Pedro), confirmam conceitos imagem atribuindo à função continua o significado de função que *a cada ponto* *do seu domínio associa uma imagem*, sendo essas as conceções representativa dos estudantes para justificar a (des)continuidade dos gráficos analisados ao responder a Q_8T_{13}. Entretanto, ao analisar os mesmos gráficos após terem sido conduzido pelas exploração da tarefa à dedução dos critérios da existência de continuidade de uma função num ponto, esses 4 pares atualizaram sua conceção sobre a continuidade de função. Os excertos "Existe limite, porém não está definida" (Ismael e Jorge), "Não pois não existe limite no ponto $x_0 = 1$" (Fátima e Miriam), "os limites laterais são diferentes e a função não está definida" (Cláudio e Pedro), "pois $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = f(1)$" e "Há um limite, porém há um salto na função, ou seja, não está definida"(Ismael e Jorge) revelam conceitos imagem correto do conceito de continuidade como *resultado da igualdade* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, confirmando que todos esses pares foram capazes de atualizar suas conceções intuitivas iniciais sobre a continuidade de função por uma conceção correta.

O significado da continuidade de uma função que *a cada ponto do seu domínio associa uma imagem* ainda permanece muito forte no *conceito-imagem* do trio André, Eliseu e Vítor para descrever a continuidade de funções, sendo mobilizado por eles na análise dos gráficos, conforme se pode observar na sua reposta à Q_8T_{13} e no diálogo com o professor no momento da sua resolução (figura 8.1.6).

Diálogo na resolução Q_8T_{13}	Resposta da Q_8T_{13}
Vítor: Professor, tem que usar os critérios utilizados anteriormente? **Professor:** Sim, porque agora você já tem uma ideia dos critérios de continuidade local de uma função. Por exemplo, esta aqui (f_1) é contínua em ℝ? **Eliseu:** Não, porque neste ponto [$x = 1$] não tem representação [refere-se à bolinha aberta na f_1]. **Vítor:** Professor ela está tendendo. Tem o limite. Os dois estão indo para cá [aponta para o limite em $x = 1$]. Ela não está dependendo daquele ponto [$x = 1$]. É como se ela desse um salto. **Professor:** Então eu te pergunto: O limite é suficiente para concluir sobre uma função ser contínua no ponto? **Eliseu:** Não. **Professor:** Então além do limite, o que mais é preciso acontecer? **Vítor:** Todos os pontos do domínio precisam ter uma imagem. Então a função tem de estar definida em cada ponto bonitinho lá.	$\boldsymbol{f_1}$**:** Não é contínua porque em $x = 1$, $f(x)$ não está definida. $\boldsymbol{f_2}$**:** Não é contínua porque em $x = 1$ os limites laterais são diferentes. $\boldsymbol{f_3}$**:** Contínua pois é do formato $f(x) = \frac{k}{x-x_0} + y_0$. $\boldsymbol{f_4}$**:** É contínua. Para cada valor de x, corresponde um $f(x)$. $\boldsymbol{f_5}$**:** Não é contínua. A função apresenta comportamento diferente para valores à esquerda de x_0, dos valores a direita. À esquerda está definida, e a esquerda não.

Figura 8.1.6 – Diálogo do trio André, Eliseu e Vítor com o professor e sua resposta à Q_8T_{13}

O diálogo mostra que este par de estudantes possui conhecimentos de que a existência o limite e da imagem $f(x_0)$ são critérios da continuidade local da função. Isso se justifica nas respostas dos estudantes ao questionamento do professor sobre a continuidade da função f_1, tendo Eliseu respondido "neste ponto [$x = 1$] não tem representação" (conhecimento associado à existência da imagem $f(1)$) e Vítor: "Tem o limite. Os dois estão indo para cá … É como se ela desse um salto" (conhecimento da existência de limite). Salienta-se, ainda, que o professor realiza questionamento aos estudantes que visa conduzi-los ao reforço e consolidação dos critérios de continuidade, sendo corretamente respondidos por eles.

Entretanto, evidencia-se que a conceção de continuidade associada à função que *a cada ponto do seu domínio associa uma imagem* é para esse trio de estudantes o fator que determina a continuidade de uma função. Esta conclusão baseia-se nas respostas apresentadas por esse par de estudante na análise dos cinco gráficos. Nas respostas, quatro dos cinco gráficos analisados não apresentam menção da (in)existência do limite para justificar a (des)continuidade da função em $\mathbb{R}$. Ademais, os excertos dessas respostas: "$f(x)$ não está definida" (f_1), "cada valor de x corresponde um $f(x)$"(f_4) e "A direita está definida e a esquerda não"(f_5) revelam que a (in)existência de pontos $(x, f(x))$ no gráfico foram as bases usadas por estes estudantes para concluir sobre a (des)continuidade da função, evidenciando assim significado de continuidade da função que *cada a ponto do seu domínio associa tem uma imagem*.

O par restante, Gil e Maria, apresentou conceitos imagem conflitantes da continuidade de uma função, associada *à existência do limite no ponto* (figura 8.1.7). Em suas respostas, os excertos "pois independente de $f(1)$ existir, o limite … é igual a 3", "pois o(s) limite(s) lateral(is)" (f_2, f_4 e f_5) e "pois não existe $\lim_{x\to 1} f(x)$" (f_3) revelam que a existência do $\lim_{x\to x_0} f(x)$ é base para a sua análise dos gráficos e conclusão sobre a (des)continuidade de cada função.

(f_1): Contínua, pois independente de existir $f(1)$ o limite quando x tende a $x_0 = 1$ é igual a 3
(f_2): Não é contínua, pois os limites laterais têm valores diferentes.
(f_3): Não é contínua, pois não existe $\lim_{x\to 1} f(x)$
(f_4): É contínua, pois os limites laterais em torno de $x_0 = 1$ têm o mesmo comportamento.
(f_5): Não é contínua, pois o limite lateral esquerdo não é possível determinar.

Figura 8.1.7 – Extrato da resposta do par Gil e Maria à Q_8T_{13}

Desta forma, apesar da generalidade dos estudantes terem conseguido desenvolver conceitos imagem corretos da continuidade associada a igualdade $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, é possível verificar que conceitos imagem conflitantes do conceito de continuidade ainda permanecem associados aos *conceito-imagem* dos estudantes sobre este conceito matemático. Por este motivo, na discussão coletiva dessa tarefa, o professor os questionou sobre que conceção de uma função contínua possuíam antes da experiência realizada nessa tarefa. Neste momento, Ismael respondeu: “é aquela que você não pode tirar o lápis do gráfico” e acrescentou que qualquer ponto não definido, salto ou interrupção no gráfico caracterizava uma função descontínua. O professor então esclareceu aos estudantes que as conceções de função contínua associada à *função cujo gráfico não possui interrupções*, ou mesmo, que *a cada ponto do seu domínio associa uma imagem*, são conflitantes, uma vez que não caraterizam todas as funções contínuas, e podem ser um obstáculo à compreensão da continuidade de algumas funções, como por exemplo, as funções racionais da forma $f(x) = \frac{k}{x - x_0} + y_0$, que são contínuas em todo o seu domínio ($D_f = \mathbb{R} - \{x_0\}$) mas apresentam interrupção no seu gráfico em $x = x_0$. Finalizou o seu discurso orientando os estudantes que sempre analisassem o $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ para decidir sobre a continuidade de uma função.

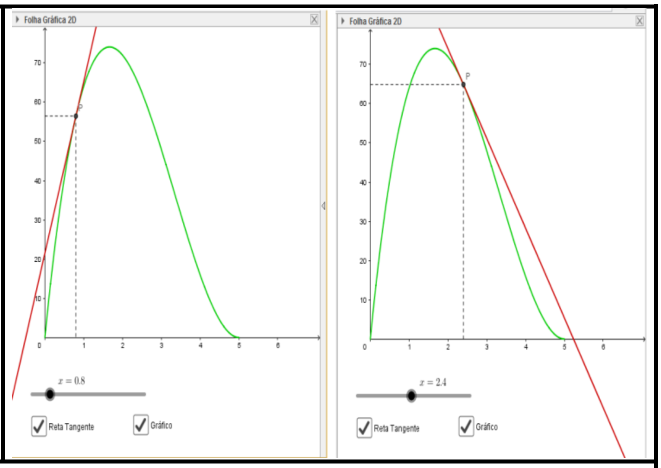
Na Q_4T_{14}, após os estudantes terem realizado, numa *applet* do GeoGebra, explorações de arrastamento do seletor x que produzia deslocamento do ponto $P = (x, V(x))$ no gráfico da função V, todos os grupos reconheceram a continuidade da função nas condições exploradas. Três destes grupos apresentaram conceitos imagem corretos associados ao significado de continuidade como *resultado da igualdade* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ em todos os pontos do seu domínio, como observado quando André e Jorge respondem à questão “A função V, resposta da questão anterior, é contínua em todo o seu domínio? Justifique sua resposta”: “Sim, pois para todo valor de no intervalo (0,5) há um limite e a função está definida no mesmo, ou seja, $\lim_{x \to x_0} V(x) = V(x_0)$”.

Para o par Eliseu e Vítor, o significado de continuidade de uma função está *associado às funções contínuas preconcebidas*, que descreve uma conceção correta de função contínua assentada no reconhecimento de que a função correspondente pertence a uma família de funções contínuas. Estes estudantes foram capazes de identificar que a expressão analítica da função do problema era um polinómio e a partir daí concluir que a função era contínua em todo o seu domínio, tal como se verifica na sua resposta: “É contínua pois é um polinômio”. Os restantes dois pares não apresentaram indicações de conceitos imagem para justificar a continuidade da função, tal como se observa no diálogo de Fátima e Miriam e sua resposta na Q_4T_{14} (figura 8.1.8).

Miriam: É isso aqui [analisa o gráfico de V]. Então é contínua! Porque $x = 0$ e $x = 5$ não vai estar no domínio. É o intervalo aberto! Os extremos 0 e 5 a gente não conta né?

Fátima: Está certo. [...]

Miriam: Mexe aqui no x de novo. Óh, ele vem, cresce, cresce, cresce. Chega neste ponto e desce, desce, desce [arrasta o seletor x e visualiza o deslocamento do ponto $P(x, y)$ no gráfico].



Q_4T_{14}: A função V, resposta da questão anterior, é contínua em todo o seu domínio? Justifique sua resposta”.

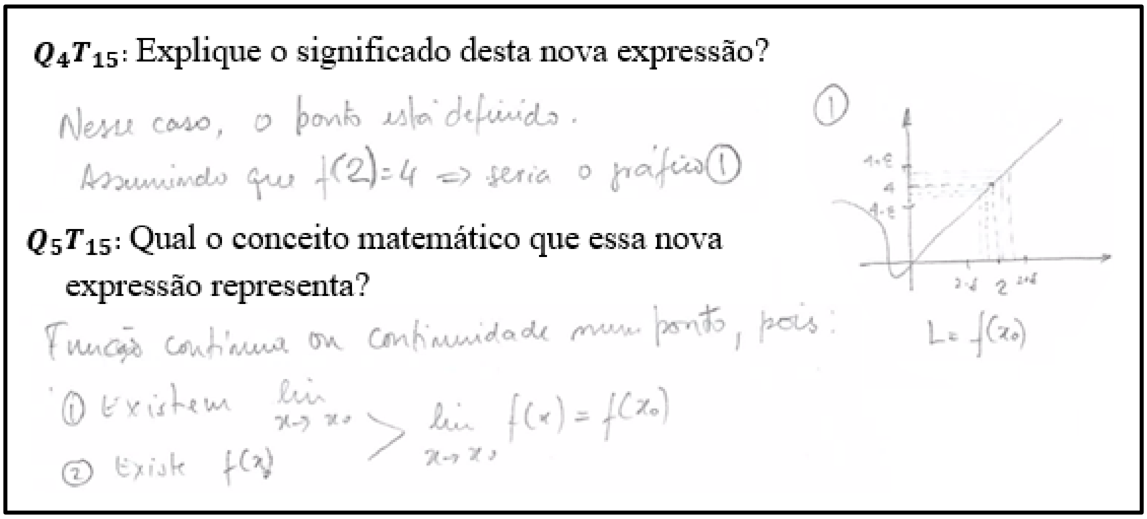
No intervalo (0,5) é contínua.

Figura 8.1.8 – Diálogo e exploração no GeoGebra de Fátima e Miriam na resolução da Q_4T_{14}

A falta de justificação deste par de estudantes sobre a sua conclusão correta da continuidade da função V, na resposta à questão Q_4T_{14}, e os excertos de comentários de Miriam “É isso aqui [visualiza o gráfico de V]. Então é contínua!” e “Mexe aqui no x de novo. Óh, ele vem, cresce, cresce, cresce. Chega neste ponto e desce, desce, desce” evidenciam que esse par de estudantes se baseou na visualização do gráfico da função para concluir sobre sua continuidade, sem lhe atribuir significados.

Nas questões $(Q_4\ e\ Q_5)T_{15}$, que pretendiam verificar se os estudantes eram capazes de reconhecer a continuidade local de uma função, representada pela sua definição formal, e nas questões $(Q_2\ e\ Q_3)T_{16}$ que desafiavam os estudantes a analisarem a (des)continuidade de uma função num intervalo fechado $[a, b]$, representada geometricamente numa *applet* do GeoGebra, verifica-se que todos os pares de estudantes evidenciam possuir uma conceção de continuidade local como *resultado da igualdade* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Os oito pares que resolveram as questões $(Q_4\ e\ Q_5)T_{15}$, apresentaram conceitos imagem corretos associados ao significado de continuidade como *resultado da igualdade* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Estes estudantes apresentaram explicações corretas e elucidativas do $\lim_{x\to x_0} f(x)$ relacionado ao valor de $f(x_0)$, para traduzir a definição formal da continuidade pela igualdade $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, complementando-as com esquemas de registos algébricos e/ou esboço do gráfico de uma função continua, para justificar a continuidade da função, conforme exemplificado nas respostas de Eliseu e Vítor (figura 8.1.9).


Q_4T_{15}: Explique o significado desta nova expressão?

Nesse caso, o ponto está definido.

Assumindo que $f(2)=4 \Rightarrow$ seria o gráfico ①

Q_5T_{15}: Qual o conceito matemático que essa nova expressão representa?

Função contínua ou continuidade num ponto, pois:

① Existem $\lim_{x\to x_0}$ > $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

② Existe $f(x)$

Figura 8.1.9 – Respostas do par Eliseu e Vítor às $(Q_4\ e\ Q_5)T_{15}$

Já na $(Q_2\ e\ Q_3)T_{16}$, os sete pares de estudantes recorreram à análise do comportamento do gráfico da função nos pontos $x = 2, x = a$ e $x = b$, aferindo a veracidade das igualdades $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ e $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$, para concluir que a função apresentada era descontínua no intervalo $]a, b[$ mas contínua nos extremos $x = a$ e $x = b$, apresentando assim conceitos imagem corretos associados ao significado de continuidade como *resultado da igualdade* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, conforme exemplificado nas respostas do par Cláudio e Pedro (figura 8.1.10).

Q_2T_{16}: Essa função (original) é contínua no intervalo aberto $]a, b[$? Justifique.

Não, pois quando $x=2$ não existe limite, sendo que uma das condições de existencia de continuidade é o limite no ponto ser igual a imagem no ponto.

Q_3T_{16}: Ela é contínua nos extremos a e b? Justifique.

Sim, pois o limite a direita do ponto "a" é igual a $f(a) = -1 \therefore \boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)}$ e o limite a esquerda no ponto "b" é igual a $f(b) = 11 \therefore \boxed{\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)}$.

Figura 8.1.10 – Respostas do par Cláudio e Pedro às $(Q_2\ e\ Q_3)T_{16}$

O excerto da resposta deste par "sendo que uma das condições de existência de continuidade é o limite no ponto ser igual a imagem no ponto" confirma que o seu *conceito-definição* de continuidade local de uma função está associado à igualdade $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Apoiados nesta conceção, os estudantes identificam a inexistência do $\lim_{x\to 2} f(x)$ para concluir que a função é descontínua em $]a, b[$. Para além disso, identificam no gráfico da função o $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ e $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ verificando as respetivas imagens $f(a)$ e $f(b)$, para concluir a continuidade da função nos extremos do intervalo $[a, b]$.

8.1.2. Síntese

Em síntese, a análise dos dados permite descrever uma caracterização dos significados atribuídos pelos estudantes ao conceito de continuidade, resultado de seus conceitos imagem evocados para decidir e justificar a (des)continuidade de funções e interpretar a expressão algébrica que visava definir formalmente a continuidade de uma função. Estes significados revelam a conceção dos estudantes sobre o conceito de continuidade.

Os dados revelam que as conceções intuitivas do conceito de continuidade, nomeadamente associada à *função cujo gráfico não possui interrupções* ou que *a cada ponto do seu domínio associa uma imagem*, estão presentes sobretudo no início da aprendizagem da continuidade (tarefa T_{13}), antes dos estudantes explorarem o conceito formal. Evidencia-se que estas conceções são resultado de suas experiências anteriores sobre o estudo de funções e causaram alguns erros na interpretação dos gráficos de funções em que a $f(x_0)$ não estava definida, o $\lim_{x \to x_0} f(x)$ não era satisfeito ou a igualdade $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ não se verificava, impedindo-lhes de reconhecer a (des)continuidade dessas funções.

Após a experiência inicial na aprendizagem do conceito de continuidade, onde foi sistematizado pelo professor os critérios de existência de continuidade de uma função num ponto x_0, nomeadamente, i) $\exists\, f(x_0)$; ii) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ e iii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, essas conceções intuitivas dos estudantes são atualizadas por conceções formais, pois os estudantes passaram a atribuir significado ao conceito de continuidade associando-o à *existência do limite no ponto*, que descreve uma conceção limitada do conceito de continuidade, e associado a *funções contínuas preconcebidas* ou à *igualdade* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, que traduzem conceções corretas deste conceito.

Entretanto, no decorrer da intervenção didática, verifica-se que o significado do conceito de continuidade associado à *igualdade* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ foi consolidado por todos os estudantes nos seus respetivos *conceito-imagem* desse conceito, pois utilizaram conceitos imagem associados aos critérios de existência de continuidade de uma função num ponto x_0, para interpretar o conceito representado pela expressão algébrica de sua definição formal e justificar a continuidade como pressuposto do TVI, no fim do estudo.

Finalmente, é possível inferir que o significado da continuidade associada à *igualdade* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, tenha sido favorecida por explorações dinâmicas que realizaram em *applets* do GeoGebra. Sobre esse aspeto, aponto que as explorações dinâmicas que os estudantes realizaram das aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to L$ e de pontos $\big(x, f(x)\big)$ no gráfico de funções, para analisar e decidir a existência e valor do $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e da $f(x_0)$, revelam os ter ajudado a identificar que a continuidade de uma função f em $x = x_0$ é garantida, quando a existência de $\lim_{x \to x_0} f(x), f(x_0)$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ é satisfeita, contribuindo para o desenvolvimento e consolidação da conceção da continuidade como resultado da *igualdade* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

8.2. O trabalho com as representações do conceito de continuidade

Esta componente da compreensão dos estudantes sobre o conceito continuidade é analisada a partir de três ações associadas ao trabalho com as diferentes representações desse conceito, e será centrada em aspetos que se constituem como objetivos de sua aprendizagem, nomeadamente, (i) representar geometricamente a continuidade de uma função e algebricamente os critérios de sua existência; (ii) reconhecer o conceito de continuidade quando representado geometricamente, algebricamente por sua definição formal e como pressuposto do TVI; e (iii) transformar algebricamente a função contínua que modela o volume de uma caixa de formato paralelepípedo, e transformar geométrica e algebricamente a continuidade de uma função representada por sua definição formal.

8.2.1. Representar a continuidade de função em diferentes representações

A capacidade de os estudantes representarem o conceito de continuidade em diferentes representações é inicialmente analisada nas questões (Q_1 e Q_2)T_{13}, em que os estudantes foram desafiados a representar geometricamente uma função contínua à sua escolha e a justificar o porquê da continuidade desta função. Todos os seis pares apresentaram corretamente o esboço do gráfico de uma função contínua preconcebida e recorreram à representação verbal associada ao seu conhecimento intuitivo de função contínua para justificar a continuidade. Esta situação é evidenciada na resposta de Gil e Maria (figura 8.13) que representaram corretamente o gráfico de uma função linear, marcando neste gráfico alguns pontos $(x, f(x))$ para indicar a *associação* entre os dois objetos, $x \in D_f$ e $f(x)$, e justificar a continuidade da função representada.

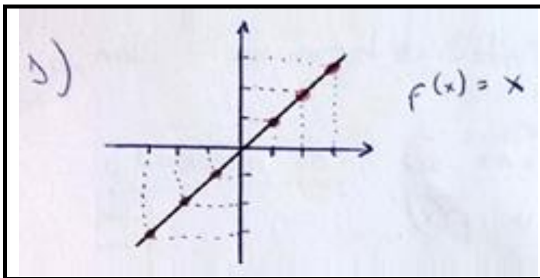
	**Q_2T_{13}: Justifique o porquê desse gráfico ser a representação de uma função contínua.** Porque na função apresentada sempre há $f(x)$ para qualquer valor atribuído a x

Figura 8.2.1 – Resposta do par Gil e Maria às (Q_1 e Q_2)T_{13}

Após esse desafio inicial, os estudantes foram conduzidos pelas questões (Q_5 e Q_6)T_{13} à exploração da representação geométrica da continuidade de uma função numa *applet* do GeoGebra. Eles realizaram explorações de seletores $A = f_k(2)$ e k que produziram deslocamentos do ponto $(2, f_k(2))$ e do comportamento gráfico lateral da função f_k em torno de $x_0 = 2$ $\left(\lim_{x\to 2^-} f_k(x)\right)$ a fim de analisar a (des)continuidade da função f_k em $x_0 = 2$. Sob este aspeto, aponto que há evidências de que a visualização dinâmica dos efeitos dessas explorações no gráfico de f_k favoreceu a conexão entre representações algébricas e geométrica de continuidade e permitiu aos estudantes descobrirem que a continuidade de uma função f no ponto $x = x_0$ é garantida quando a existência de $\lim_{x\to x_0} f(x), f(x_0)$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ seja satisfeita, tal como exemplificado no diálogo entre André, Eliseu e Vítor, na resolução das $(Q_5$ e $Q_6)T_{13}$:

> **Vítor:** Calma aí! [arrasta o parâmetro k para que apresente $\lim_{x\to 2^-} f_k(x) = \lim_{x\to 2^+} f_k(x)$] Só há uniformidade quando $k = 0{,}5$, porque aí não vai ter nenhum salto [visualiza o gráfico de f_k no *applet*].
> **André:** Isto não seria uniformidade, seria? [mostra que $\lim_{x\to 2^+} f_k(x) \neq f_k(2)$].
> **Vítor:** Sim, porque se você jogar o ponto $A = f_k(2)$ ali no meio dos dois, definiria a função [refere-se à continuidade de f_k após fazer na *applet* $f_k(2) = 7$ e $k = 0{,}5$].
> **Eliseu:** Na Q_6T_{13}, ele quer saber como é que a gente acha o valor de k algebricamente. A gente achou ali no GeoGebra. Tem que dar $k = 0{,}5$ …
> **Vítor:** Essa aqui $[x^3 - x^2 + kx + 2]$ é para o k. É para definir esta primeira [indica o gráfico de f_k, para $x < 2$]. Essa segunda aqui [indica o gráfico de f_k, para $x > 2$] é esta $[2x + 3]$, você não tem k. E agora, quando elas são idênticas [refere-se $\lim_{x\to 2^-} f_k(x) = \lim_{x\to 2^+} f_k(x)$], para dizer que o limite é o mesmo, será que eu vou ter de igualar as duas expressões? Hum, eu acho que sim, eu acho que sim! Quer ver?

Neste momento Vítor analisa o gráfico e a expressão algébrica da função f_k enquanto que Eliseu e André refletem sobre as expressões $x^3 - x^2 + kx + 2$ e $2x + 3$.

> **Vítor:** Viu! Para ela ser continua tem que igualar! Se esta aqui é o que movimenta o k [associa $x^3 - x^2 + kx + 2$ ao gráfico de f_k , para $x < 2$] e esta aqui é a reta contínua [associa $2x + 3$ ao gráfico de f_k , para $x > 2$], para as duas estarem convergindo para o mesmo ponto tem que igualar [mostra na *applet* que $\lim_{x\to 2^-} f_k(x) = \lim_{x\to 2^+} f_k(x)$]. Isso é importante, sabermos que elas devem estar convergindo ao mesmo ponto.
> **Eliseu:** Então escreve.

No diálogo, verifica-se que Vítor arrasta os seletores k e $A = f_k(2)$ da *applet*, de forma a que o gráfico de f_k apresente $\lim_{x\to 2} f_k(x) = f_k(2)$. Estas explorações permitiram-lhe determinar geometricamente o valor k que torna a função f_k contínua, pois conclui: “só há uniformidade quando $k = 0{,}5$, porque aí não vai ter nenhum salto”. Questionado por André se essa conclusão garante a continuidade da função f_k, Vítor recorre à representação geométrica de continuidade da função f_k no GeoGebra para explicar o registo algébrico $\lim_{x\to 2} f_k(x) = f_k(2)$. Na *applet*, ele faz $k = 0{,}5$ para representar geometricamente o $\lim_{x\to 2} f_k(x) = 7$, fixa $f_k(2) = 7$ para garantir que $\lim_{x\to 2} f_k(x) = f_k(2)$, e explica: "porque se você jogar o ponto $A = f(2)$ ali no meio dos dois, definiria a função", confirmando assim que o GeoGebra permitiu-lhe reconhecer que a existência de $f_k(2)$, $\lim_{x\to 2} f_k(x)$ e $\lim_{x\to 2} f_k(x) = f_k(2)$ garantia a continuidade de f_k.

Na sequência do diálogo, verifica-se que a coordenação dos registos geométricos e algébricos de $\lim_{x\to 2} f_k(x)$ e $f_k(2)$ e o reconhecimento do $\lim_{x\to 2} f_k(x) = f_k(2)$ como garantia da continuidade de f_k, permitiu-lhe descobrir que o procedimento algébrico para encontrar o valor de k que torna a função contínua, era igualar os limites laterais $\lim_{x\to 2^+} 2x + 3$ e $\lim_{x\to 2^-} x^3 - x^2 + kx + 2$, tal como confirmam os excertos: "será que eu vou ter de igualar as duas expressões?" e "Viu! Para ela ser continua tem que igualar!".

Após essa experiência, os estudantes responderam à Q_7T_{13} que pretendia verificar se os estudantes eram capazes de deduzir os critérios de existência da continuidade local de uma função e os representar algebricamente. Verifica-se que quatro dos seis grupos de estudantes conseguiram, de forma autónoma, concluir que a existência de $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $f(x_0)$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ são critérios que devem ser satisfeitos para que uma função f seja contínua no ponto $x = x_0$. Dois destes quatro grupos recorreram a representações algébricas da igualdade $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ para justificar a continuidade em $x = x_0$, tal como na resposta de Miguel e Paulo: "Que o $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$". Os outros dois recorreram à representação verbal, dando explicações adequadas e elucidativas da igualdade $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ser satisfeita para que a função seja continua em $x = x_0$, conforme exemplificado nas respostas de Magno e Daniel: "Não deve haver interrupções no gráfico, ou seja, todos os pontos de x devem estar definidos e deve haver limites nos mesmos".

Os demais dois grupos (um par e um trio) de estudantes, a partir das condições exploradas nesta tarefa e no GeoGebra, concluem apenas que a existência do $\lim_{x\to x_0} f(x)$ é condição necessária para garantir a continuidade de uma função no ponto $x = x_0$. Esses grupos recorrem à representação verbal de limite, assente na igualdade dos limites laterais em x_0, para justificar as condições que devem ser satisfeitas para que uma função seja contínua em x_0, tal como verifica-se na resposta de Gil e Maria "Os limites laterais devem ser os mesmos, ou seja, deve existir o limite para a $f(x)$", à questão a Q_7T_{13}.

8.2.2. Reconhecer a continuidade de função em suas diferentes representações

A capacidade de reconhecer a continuidade de uma função em suas diferentes representações começa por ser analisada na questão Q_8T_{13}, em que os estudantes interpretaram gráficos de funções para decidir sobre a continuidade. Verifica-se que quatro dos seis grupos reconheceram as (des)continuidades das funções nos gráficos analisados, tendo recorrido à representação verbal da igualdade $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, e apresentando argumentos adequados e elucidativos para justificar suas conclusões, tal como exemplificado nas respostas de Ismael e Jorge (Q_8T_{13}) apresentadas na figura 8.14.

Respostas de Ismael e Jorge à Q_8T_{13}
$\boldsymbol{f_1}$**:** Existe limite, porém não está definida. Logo, não é contínua.
$\boldsymbol{f_2}$**:** A função está definida em um ponto, porém não há limite no mesmo. Logo não é contínua.
$\boldsymbol{f_3}$**:** Não existe limite e não está definida no ponto. Logo, não é contínua.
$\boldsymbol{f_4}$**:** Há limite e a função está definida em todos os pontos. Logo, é contínua.
$\boldsymbol{f_5}$**:** Há um limite, porém há um salto na função, ou seja, não está definida. Logo, não é contínua.

Figura 8.2.2 – Resposta do par Ismael e Jorge à Q_8T_{13}

Esse par de estudantes analisou nos gráficos das funções, o $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e a existência da imagem $f(x_0)$, os quais constituem critérios para a continuidade local de uma função. Quando pelo menos um desses critérios não era satisfeito os estudantes concluíram que a função era descontínua, conforme se verifica no excerto "f_2: a função está definida em um ponto, porém não há limite no mesmo. Logo não é contínua". Caso contrário, os estudantes verificaram se a igualdade $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ era satisfeita para concluir sobre a continuidade da função, tal como no excerto "f_4: Há limite e a função está definida em todos os pontos. Logo, é contínua". Desta forma, esse par revela ter sido capaz de usar corretamente uma tradução verbal da igualdade $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ para concluir sobre a (des)continuidade dos gráficos analisados.

Os demais dois pares, na Q_8T_{13}, não conseguiram reconhecer a (des)continuidade em todos os gráficos analisados. Gil e Maria não reconheceram a descontinuidade da função f_1 enquanto que André, Eliseu e Vítor não reconheceram a descontinuidade da função f_3, conforme se verifica no extrato de suas respetivas respostas (figura 8.2.3).

Gil e Maria: Contínua, pois independente de existir $f(1)$, o limite quando x tende a $x_0 = 1$ é igual a 3.
André, Eliseu e Vítor: Contínua pois é do formato $f(x) = \frac{k}{x-x_0} + y_0$.

Figura 8.2.3 – Extrato de respostas dos estudantes à Q_8T_{13}

Os registos de resposta apresentados por estes dois grupos (par e trio) permitem inferir que não foram capazes de usar corretamente o registo verbal ou algébrico associado aos critérios de continuidade. De facto, Gil e Maria apenas analisaram a existência do $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ e concluíram que a função f_1 era contínua em $x = 1$, não se apercebendo que $\nexists\, f(1)$. André, Eliseu e Vítor, por sua vez, relacionou incorretamente o gráfico da função f_3 à função racional da forma $f(x) = \frac{k}{x-x_0} + y_0$, não se apercebendo que por $f(1) = 0$ a análise da continuidade em $x = 1$ deveria ser realizada.

Assim, apesar da generalidade dos estudantes terem mobilizado os critérios de continuidade de uma função para interpretar gráficos de funções e decidir corretamente sobre suas (des)continuidade, as dificuldades apresentadas pelos estudantes que evidenciaram não terem reconhecido as (des)continuidade de todas as funções nos gráficos analisados, indicava a necessidade de que os critérios de continuidade fossem consolidados por todos os estudantes. Por este motivo, na discussão coletiva dessa tarefa, o professor questionou os estudantes se a existência do $\lim_{x\to x_0} f(x)$ era condição suficiente para que uma função seja continua em x_0. Nesse momento, Miriam respondeu: "Não, esse limite tem de ser igual a imagem $f(x_0)$". O professor então esclareceu à turma que a continuidade de uma função f no ponto $x = x_0$ é garantida quando a existência de $\lim_{x\to x_0} f(x), f(x_0)$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ é satisfeita, sistematizando assim os critérios de existência da continuidade de uma função.

No intuito de conduzir os estudantes à consolidação dos critérios de existência de continuidade de uma função em $x = x_0$, o professor exemplificou, no quadro negro, gráficos de funções nos quais esses critérios não são satisfeitos, sistematizando os tipos de descontinuidade de uma função. Ademais, introduziu a noção de continuidade global de uma função na representação geométrica e algébrica, justificando a continuidade das principais funções anteriormente estudadas (ex. função polinomial, racional, exponencial), e algumas propriedades de funções contínuas, ressaltando que a prova rigorosa dessas propriedades seria apresentada em outra aula.

Nas $(Q_2$ e $Q_3)T_{16}$, os estudantes precisaram de interpretar o gráfico da função f, para decidir sobre sua (des)continuidade num intervalo fechado $[a, b]$. Verifica-se que cinco pares de estudantes analisaram corretamente o comportamento do gráfico da função f, nos pontos $x = 2, a = -2$ e $b = 4$, recorrendo aos critérios de continuidade, na forma verbal ou algébrica, para aferir a veracidade das igualdades $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ e $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$, o que lhes permitiu concluir corretamente que a função f é contínua nos extremos $a = -2$ e $b = 4$ do intervalo mas descontínua no intervalo aberto $]a, b[$ uma vez que não era contínua em $x = 2$, conforme exemplificado na resposta de Eliseu e Vítor (figura 8.2.4).

$\boldsymbol{Q_2T_{16}}$: **Essa função (original) é contínua no intervalo aberto]a, b[? Justifique.**
Não, porque os limites laterais no ponto $x = 2$ são diferentes.
$\boldsymbol{Q_3T_{16}}$: **Ela é contínua nos extremos a e b? Justifique.**
Sim, pois $\lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$ e $\lim_{x \to 4^-} f(x) = f(4)$

Figura 8.2.4 – Respostas do par Eliseu e Vítor às $(Q_2$ e $Q_3)T_{16}$

Os outros dois pares, apesar de terem reconhecido corretamente a descontinuidade da função f em $x = 2$, calculando os limites laterais neste ponto e verificando que não eram iguais, não conseguiram reconhecer a sua continuidade nos extremos do intervalo, tal como evidencia a resposta de Ismael e Talita (Q_3): “Não, a função não é contínua nos pontos a e b, porque não existe limite e os pontos em x tem imagens”. Ao justificarem a descontinuidade da função nos pontos a e b “porque não existe limite” os estudantes estão a basear-se no resultado do cálculo dos limites laterais nesses pontos: $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to b^-} f(x) \neq \lim_{x \to b^+} f(x)$. Desta forma é possível inferir que estes estudantes não se aperceberam que a análise da continuidade da função nos extremos de um intervalo, deverá considerar apenas a análise dos limites laterais onde a função está definida, neste caso, $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to b^-} f(x)$.

Ainda nessa tarefa T_{16} os estudantes foram conduzidos pelas questões Q_4, Q_5 e Q_6 tendo que recorrer a explorações na *applet* do GeoGebra, à dedução dos pressupostos do TVI, que envolvia reconhecer que a continuidade da função em $[a, b]$ é uma condição para garantir a existência de $x_0 \in]a, b[$ tal que $f(x_0) = d$, onde $d \in]f(a), f(b)[$. Entretanto, na resolução da questão Q_4, ocorreu algo inesperado. Ao resolvê-la, Eliseu e Vítor, apresentaram dúvidas no tocante à visualização dos efeitos das explorações da *applet*, no gráfico da função f. Ao realizar arrastamentos do seletor d e visualizar os pontos $N = (x, d)$, interseção entre a reta $y = d$ e o gráfico da função f, Eliseu percebeu, que em dado momento, o ponto N desaparecia no ecrã. Esta 'falha' no GeoGebra poderia influenciar a sua conclusão na Q_4 sobre a existência de $x_0 \in]a, b[$ cuja imagem é $f(x_0) = d$, pelo que solicita ao professor esclarecimento (figura 8.2.5).

Eliseu: Professor, eu não consigo traduzir isto. Olha, o gráfico vem, eu vou marcando a interseção $[N = (x, d)]$ até este ponto [mostra o comportamento do gráfico de f para $-7 < f(x) < 2{,}5$]. Daqui para frente, até $f(x) = 3$, deixa de existir interseção. Vai aparecer intersecção novamente … [pausa] Ué! [visualiza que não há interseção para $f(x) = 7{,}4$ - imagem ao lado].
Professor: Isso é um erro no *applet*. Porque deveria aparecer a intersecção aqui [indica um ponto $N = (x, d)$]. Mas não tem problema [interrompido por Eliseu]

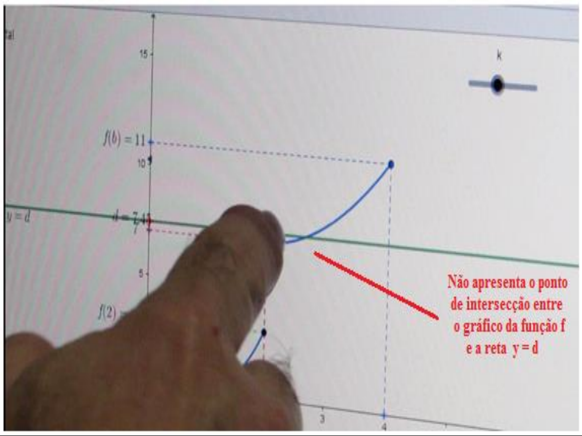


Figura 8.2.5 – Diálogo e exploração no GeoGebra do par Eliseu e Vítor na tarefa T_{16}

Ao relatar o motivo de sua dúvida, Eliseu recorre às explorações no GeoGebra e é surpreendido com o desaparecimento do ponto $N = (x, d)$ no gráfico da função, que segundo o professor, é causado por um erro no GeoGebra. O diálogo segue:

Eliseu: Então, o que acontece é que ele [gráfico] vem com intersecção, pula [em $x = x_0$], vem e para de existir [a intersecção], e depois começa a existir de novo. Ou seja, tem um intervalo aqui [indica $2{,}5 < d < 3$] que ele deixa de existir.

Professor: Na verdade, a intersecção continua existindo. O problema está no *applet*. Olha só, coloca sua reta $y = d = 2{,}5$. Aqui tem interseção?

Eliseu: Deveria ter, mas não aparece!

Professor: Sim. Tem intersecção. Agora eu te pergunto: Aqui tem interseção? [indica no *applet* se existe $3 < d < 7$].

Eliseu: Não, a função dá um salto.

Professor: Perfeito. Às vezes o *applet* apresenta este erro! É um erro de comando.

Eliseu: Ah tá! Eu estava achando estranho.

O professor esclarece Eliseu que o desaparecimento do ponto $N = (x, d)$ é causado por um erro de comando do GeoGebra e conduz o estudante, através de questionamento, a identificar a (in)existência do N, pela visualização da intersecção da reta $y = d$ com o gráfico de f. Na sequência deste episódio, o professor esclareceu os estudantes que havia uma limitação visual no *applet* do GeoGebra, causada por erros no comando de interseção de curvas. Pediu-lhes que se orientassem também pela análise visual das curvas, a fim de identificar os pontos de intersecções $N = (x, d)$, mesmo que estes não estivessem representados no *applet.* Desta forma, esta limitação do GeoGebra foi resolvida tendo os estudantes seguido, sem problemas, na resolução da tarefa.

A análise dos dados referentes à resolução das questões $(Q_4$, Q_5 e $Q_6)T_{16}$ revela que todos os pares de estudantes conseguiram descobrir que a continuidade da função em $[a, b]$ é uma condição para garantir a existência de $x_0 \in]a, b[$ tal que $f(x_0) = d$, onde $d \in]f(a), f(b)[$ (TVI). Esta aprendizagem parece ter sido favorecida pelas explorações no *applet* do GeoGebra, nomeadamente, as simulações de parâmetros k e d que geravam simulações do comportamento gráfico lateral da função f em torno de x_0 $\left(\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)\right)$, e de pontos $N = (x, d)$, interseção entre a reta $y = d$ e o gráfico de f, as quais permitiram a coordenação dos registos algébricos dos pressupostos do TVI aos respetivos registos geométricos na *applet*, como se pode perceber no diálogo de Cláudio e Pedro e sua resposta à Q_6T_{16}:

> **Cláudio:** A pergunta é para qualquer valor de d, entendeu? [explica a Q_4] Aqui, óh: Seria possível garantir um valor de x_0 − tem que existir o valor de x_0 entre a e b − Você pode garantir para qualquer valor de d? Não, porque aqui óh, quando $d = 4$ não posso garantir o x_0 [faz $d = 4$ no *applet* e visualiza o gráfico de f].
>
> **Pedro:** Realmente, a gente não pode garantir o valor de x_0 porque não existe limite neste ponto [reflete sobre o registo algébrico $\exists\ x_0 \in]a, b[$ tal que $f(x_0) = d$].
>
> **Cláudio:** Lógico! Mas não existe o limite porque a função é descontínua neste intervalo.
>
> **Pedro:** A gente pode colocar que não é possível garantir $[f(x_0) = d]$ porque a função é descontínua.

No diálogo, verifica-se que os efeitos das explorações que Cláudio realizou na *applet* o ajudou a refutar a condição $\exists\ x_0 \in]a, b[$ tal que $f(x_0) = d$ (registo algébrico) quando a função é descontínua $[a, b]$, pois faz no *applet* $d = 4$ e visualiza o gráfico de f que apresenta descontinuidade em $x_0 = 2$, com $f(2) = 3$ (tipo salto) e conclui “quando

$d = 4$ não posso garantir o x_0". Pedro, confirma a conclusão de Cláudio e aponta como causa, a inexistência do $\lim_{x \to 2} f(x)$ que encaminha à descontinuidade da função. Na sequência do diálogo, esta conclusão é reforçada e confirmada na resposta à Q_6.

> **Pedro:** Altere o valor do parâmetro k. Em seguida volte a clicar no parâmetro d [Q_5].
> **Cláudio:** Ok, e muda ele, né? Vamos lá [arrasta o d no *applet*]. Agora tem ponto (x_0, d). Agora o ponto vem oh! O ponto vai até o final [explora]. O ponto vai, o ponto vai…
> **Pedro:** O ponto vai, o ponto vem, o ponto vai, o ponto vem. Agora registe algumas notas que você chegou. Como poderá garantir a existência do x_0?
> **Cláudio:** Agora sim! Agora dá. Olha! [mostra os pontos (x_0, d) no *applet*] Porque, após as modificações de k, sim! É possível garantir porque ela é contínua.
> **Pedro:** Como poderá garantir a existência do x_0 … [Q_6]? Só é possível garantir o x_0 se a função for contínua no intervalo $[a, b]$.

Cláudio modifica o seletor d na *applet*, visualiza o efeito das modificações e conclui: "agora tem ponto", referindo-se aos pontos $N = (x, d)$ que mostram a existência de $x_0 \in]a, b[$ cuja imagem é d. Os excertos "o ponto vai, o ponto vai …" e "ponto vai, o ponto vem" revelam que a visualização geométrica dos pontos se movimentando no gráfico, permitiu esse par de estudante descobrir a continuidade como critério para a existência de $f(x_0) = d$ e concluir na Q_6: "Só é possível garantir o x_0 se a função for contínua no intervalo $[a, b]$".

Nas $(Q_4\ e\ Q_5)T_{15}$, todos os oito pares de estudantes reconheceram a continuidade de uma função representada pela sua definição formal. Estes estudantes reconheceram que a expressão $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que $x \in D_f$ e $|x - 2| < \delta$ então $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ correspondia à definição formal do limite (L) no ponto $x = 2$, com $L = f(2)$, e que a função estava definida em $x_0 = 2$, pois $f(2) = 4$ $(Q_4 T_{15})$. Desta forma, concluíram corretamente que a expressão algébrica representava a continuidade da função em $x_0 = 2$, evidenciando uma adequada e correta representação verbal da definição formal de continuidade, tal como se verifica na reposta de Cláudio e Pedro no diálogo mantido por eles durante a resolução destas questões (figura 8.2.6).

Diálogo	**Cláudio:** Questão 4 … [lê o enunciado] É a definição de continuidade da função num ponto, quando a função está definida em $x = 2$, $f(2) = 4$. **Pedro:** Sim. **Cláudio:** A questão 5 não é a mesma coisa que a questão 2? [limite] Qual é o conceito matemático … [lê a questão] Ah não! É continuidade. Não é limite. **Pedro:** Sim, por que para existir continuidade tem que existir o limite no ponto. Tem que ter limite e o limite ser igual a $f(x_0)$. Entendeu? Isso aqui é uma expressão para se ter a continuidade no ponto.
Resposta	**Q_4T_{15}: Explique o significado desta nova expressão?** É a definição de continuidade no ponto pois a função $f(x)$ está definida em $f(2) = 4$. **Q_5T_{15}: Qual o conceito matemático que essa nova expressão representa?** Conceito de Continuidade

Figura 8.2.6 – Diálogo e resposta do par Cláudio e Pedro à $(Q_4\ e\ Q_5)T_{15}$

No diálogo, Cláudio reconhece que a expressão apresentada corresponde à continuidade de uma função no ponto $x_0 = 2$. Ao que parece, a sua conclusão baseou-se na igualdade $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pois constatou que "a função estava definida em $x = 2$, $f(2) = 4$" e que a referida expressão algébrica correspondia ao $\lim_{x \to 2} f(x)$ tal como se observa nos excertos "não é a mesma coisa que a questão 2 [limite]" e "É continuidade. Não é limite". Esta conclusão de Cláudio é confirmada por Pedro quando afirma "Tem que ter limite e o limite ser igual a $f(x_0)$". O conhecimento desses estudantes sobre a definição formal do limite e dos critérios de continuidade local, permitiu-lhes reconhecer a definição formal de continuidade e responder corretamente as $(Q_4\ e\ Q_5)T_{15}$.

8.2.3. Transformar a continuidade de função em diferentes representações

A capacidade de transformar a continuidade de uma função em suas diferentes representações começa por ser analisada nas questões (Q_1 e Q_3)T_{14} onde se verifica que todos os seis pares que as resolveram, conseguiram transformar algebricamente a função contínua que modela o volume de uma caixa de formato paralelepípedo realizando *tratamentos* corretos da expressão algébrica expressa o volume da caixa. Estes estudantes foram capazes de encontrar as medidas da caixa e calcular o seu volume, fornecidos os valores para o corte x (Q_1T_{14}), e generalizá-las, para determinar a expressão algébrica das dimensões da caixa em função do corte x, e representar algebricamente a função que modela o volume da caixa (Q_2T_{14}). Para além disso, as resoluções dessas questões da tarefa T_{14} revelam que as explorações numéricas das dimensões e do volume da caixa, acompanhadas de simulações dinâmicas da sua planificação e formato tridimensional, na *applet* do GeoGebra, ajudaram os estudantes a desenvolverem e expressarem algebricamente generalizações, conduzindo-os transformação algébrica da função contínua V, tal como no diálogo entre Fátima e Miriam (figura 8.2.7).

Fátima: [Ao resolver Q_1T_{14}] Tudo isso aqui é 10. Se aqui é 4,5, aqui também é 4,5. Aí dá 9 e sobra 1, no meio. Aqui é 1 cm porque vai levantar. Aqui é 1 e aqui também é 1 cm [indica a largura e comprimento da caixa *na applet*]. Aí o volume daria 1, pois 1^3. [analisa a planificação da caixa na *applet*]

Miriam: O próximo corte, $x = 2$. Fica então $2 + 2 = 4$. Aí dá 6. O volume fica 6^3. Quanto são 6^3? […] Então ficou 216. Coloca aí o $x = 2$ [simula a caixa quando $x = 2$ e observa o valor de $V(x)$ na *applet*]. Mas porque é 72? Acho que a gente está fazendo errado hen! [confere seu resultado com o valor de $V(x)$ na *applet*]

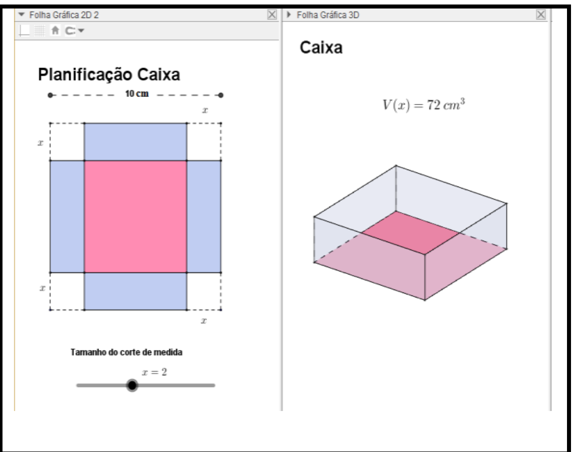


Figura 8.2.7 – Diálogo e exploração no GeoGebra do par Fátima e Miriam na tarefa T_{14}.

O diálogo mostra que este par recorre inicialmente à *applet* para apoiar seu raciocínio geométrico de encontrar as medidas da caixa, calcular o seu volume em função do corte de medida x e conferir o seu resultado, a partir de um conjunto de exemplos particulares fornecidos na Q_1. Ao verificar que um dos seus resultados não corresponde ao valor do volume apresentado na *applet* ($V(2) = 216$), recorre às simulações e a análise das dimensões da caixa na *applet*, a fim de investigar a causa do erro.

Fátima: Deixa eu ver. A gente está fazendo alguma coisa errada Miriam. Olha aqui [pausa] … [realiza simulações na planificação e visualiza os efeitos no formato tridimensional da caixa no *applet*].

Miriam: É porque a altura não é igual [explora a *applet* e visualiza suas dimensões]. Isso aqui não é um cubo. Isto aqui não é 10 cm, isto é x cm. Entendeu? Isso qui é um paralelepípedo certo? Aqui é base, aqui é altura e aqui é o comprimento [recorre à planificação e o formato tridimensional da caixa na *applet*].

Fátima: Certo.

Miriam: Vamos ver se agora vai: Volume é igual a base × altura × comprimento. […] Para $x = 2$, aqui vai ser $2 + 2 = 4$. Aqui fica é 6 [resolve $10 - 4$]. Aqui também são 6 cm. Fica então é $6 \times 6 \times 2 = 72$. Pronto! […] Agora a questão 3. Vamos lá. Isso aqui é x, certo porque o corte é x. Isso aqui é 10 menos x daqui, e menos x daqui. Ou seja $10 - 2x$. Isto daqui também é $10 - 2x$ [recorre à planificação e o formato da caixa na *applet*].

Fátima: Então fica $(10 - 2x) \cdot x \cdot (10 - 2x)$. Aí fica … [resolve o produto algébrico]. Então ficou $V(x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$ [responde Q_3T_{14}].

Os comentários do diálogo anterior revelam que a visualização dos efeitos das simulações realizadas na planificação e formato tridimensional da caixa na *applet*, permitiu este par de estudantes: (i) identificar e corrigir o erro causado em assumir a caixa como cúbica; (ii) identificar que altura da caixa difere do seu comprimento e largura, concluir que seu formato paralelepípedo e calcular o seu volume mediante a aplicação correta da fórmula $V = \text{comprimento } \times \text{largura } \times \text{ altura},$ tal como nos excertos do comentário de Miriam "É porque a altura não é igual … isso qui é um paralelepípedo certo? […] Volume é igual a base × altura × comprimento" e (iii) identificar e generalizar as medidas da caixa em função de x e que lhes possibilitaram expressar algebricamente a função que modela o seu volume, tendo realizado *tratamentos* corretos das operações algébricas nela envolvida, conforme verifica-se nos excertos "Isso aqui é x, certo porque o corte é x", "Isso aqui é 10 menos x daqui, e menos x daqui. Ou seja $10 - 2x$" e "Isto daqui também é $10 - 2x$" e o concluírem "Aí fica $(10 - 2x) \cdot x \cdot (10 - 2x)$ … Então ficou $V(x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$".

Por fim, na Q_6T_{15}, em que os estudantes eram solicitados a transformar simbólica (algébrica) e geometricamente a continuidade de uma função representada por sua definição formal, sete dos oito grupos revelaram terem conseguido alcançar satisfatoriamente os dois objetivos. Os estudantes foram capazes de *converter* a representação algébrica da definição formal de continuidade para a notação algébrica $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ ou outra expressão equivalente. Relativamente à transformação geométrica da continuidade, foram capazes de *converter* a representação algébrica para geométrica e indicar corretamente as variáveis relacionadas aos registos convertidos, por exemplo, representar o esboço do gráfico de uma função contendo registos geométrico corretos do $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$, como exemplificado no diálogo entre Clara e Talita durante a resolução e a sua resposta a esta questão (Figura 8.20).

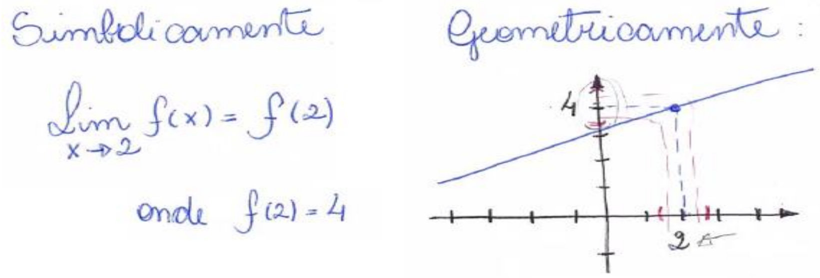
Diálogo	**Talita:** Mariana: Isso. Na questão 6, ele pede para representar simbólica e geometricamente. Foi aquilo que eu te falei. O limite da função tem que ser igual a imagem da função no ponto. **Clara:** Como isso aqui seria representado no gráfico? **Talita:** Aqui óh [apresenta sua resposta]. A vizinhança em torno de $f(2)$. Aqui no meu caso a $f(2) = 4$. Vamos supor que eu pegue um valor próximo de $x_0 = 2$, por exemplo 2,1. A imagem $f(2{,}1)$ vai ser um valor bem próximo de 4. Vamos supor que $f(2{,}1) = 4{,}05$. Aí fica $4{,}05 - 4 = 0{,}05 < \varepsilon$. Este valor $[f(x)]$ está na vizinhança de $f(2)$ de raio ε. Significa isso. Que para valores de x que eu pegue pela direita, por exemplo, os valores (imagem) ficam na vizinhança de $f(2)$. **Clara:** Agora é só explicar isso no papel.
Resposta	

Figura 8.2.8 – Diálogo do par Clara e Talita e sua resposta à Q_6T_{15}

No diálogo, Talita revela seu conhecimento dos critérios de existência da continuidade, resumidos na igualdade $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, e apresenta à Clara o seu registo da representação geométrica da continuidade, contendo o esboço do gráfico de uma função e a indicação de registos geométricos corretos de $f(2) = 4$ e do $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$. Desta forma, essa estudante revela ter sido capaz de *converter* a definição formal da continuidade nas representações simbólicas (algébrica) e geométrica de continuidade. Na sequência, Talita explica que o critério da existência de $f(x_0)$ é satisfeito (Aqui ... a $f(2) = 4$) e recorre à exemplificação de esquemas elucidativos do comportamento de pontos $(x, f(x))$, para indicar o registo geométrico do $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$, como confirmado nos excertos "Vamos supor, ..., 2,1. A imagem $f(2{,}1)$ vai ser um valor bem próximo de 4" e "para valores de x que eu pegue pela direita ... os valores ficam na vizinhança de $f(2)$", apresentando um correto *tratamento* dos registos geométricos associados à representação convertida. Desta forma, a resposta apresentada por estas estudantes revela uma transformação (*tratamento* e *conversão*) correta e adequada da representação geométrica da continuidade de uma função.

Apenas o par Miguel e Paulo, que embora tenha sido capaz de *converter* na forma algébrica, a definição formal da continuidade da função pela simbologia $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$, revelou não ter conseguido convertê-la geometricamente (figura 8.2.9).

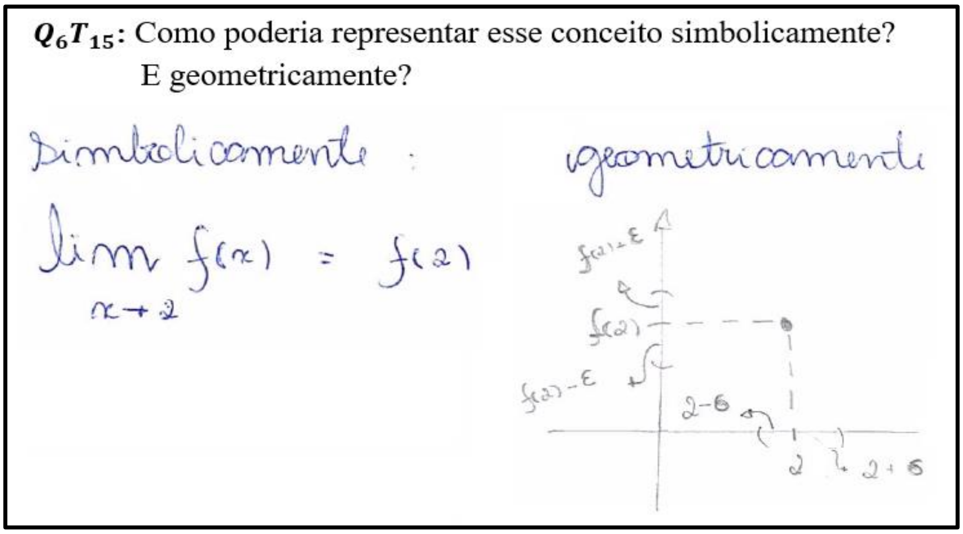


Figura 8.2.9 – Resposta do par Miguel e Paulo à Q_6T_{15}

A resposta deste par, embora apresente no plano cartesiano registos geométricos do ponto $(2, f(2))$ e de simbologias inerentes ao $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$, nomeadamente, registos das vizinhanças de $V_\delta(2)$ e $V_\varepsilon(f(2))$ através de intervalos $]2-\delta, 2+\delta[$ e $]f(2)-\varepsilon, f(2)+\varepsilon[$, a falta do esboço do gráfico da função e de indicações do comportamento dos pontos $(x, f(x))$ com $x \epsilon V_\delta(2)$ e $f(x) \in V_\varepsilon(f(2))$, constitui registos incorretos de *conversão* das simbologias $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$, os quais revelam dificuldades destes estudantes na *conversão* da representação algébrica da continuidade de uma função para sua representação geométrica.

Os resultados anteriormente apresentados, revelam uma concretização das diferentes representações do conceito de continuidade (verbal, algébrica e geométrica), pela generalidade dos estudantes, as quais possibilitaram-lhes um conhecimento mais completo do conceito, pois foram capazes de articular essas diferentes representações para interpretar e representar a (des)continuidade de uma função. Esta concretização das diferentes representações torna-se mais evidente nas respostas dos estudantes na entrevista final, o qual revela que os critérios de existência de continuidade de uma função parecem ter sido consolidados pelos quatro estudantes entrevistados. Isto porque, ao serem desafiados **(Q_3E_F)** a descrever tudo o que sabem sobre a informação $\lim_{x\to 3} f(x) =$

$f(3)$, dado que f é uma função real, todos os entrevistados reconheceram a continuidade de f em $x = 3$, e a justificaram recorrendo à representação verbal de continuidade com base no $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (figura 8.2.10).

Miriam: Como existe o $\lim_{x \to 3} f(x)$ e também existe $f(3)$ e ambos os valores são iguais, sabe-se que a função $f(x)$ é contínua no ponto $x_0 = 3$.
Eliseu: Isto implica na continuidade num ponto, desde que esteja comprovada a existência do limite em $x = 3$ 3.
Cláudio: A função é contínua no ponto $x_0 = 3$. Limite existe e é igual a imagem no ponto.
Maria: Quando afirmamos que $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$ estamos afirmando que o limite da função não só existe, mais é exatamente igual a $f(3)$, o que caracteriza a continuidade da função.

Figura 8.2.10 – Extrato de respostas dos estudantes à Q_3E_F

Além disso, estes quatro estudantes foram capazes complementar essa descrição verbal da continuidade por representações algébrica (informal e formal) e geométrica da continuidade, contendo um adequado *tratamento* dessas representações. Desta forma, revelam fluência na *conversão* de uma representação do conceito de continuidade em outra, tal como exemplifica-se na resposta de Pedro (figura 8.2.11).

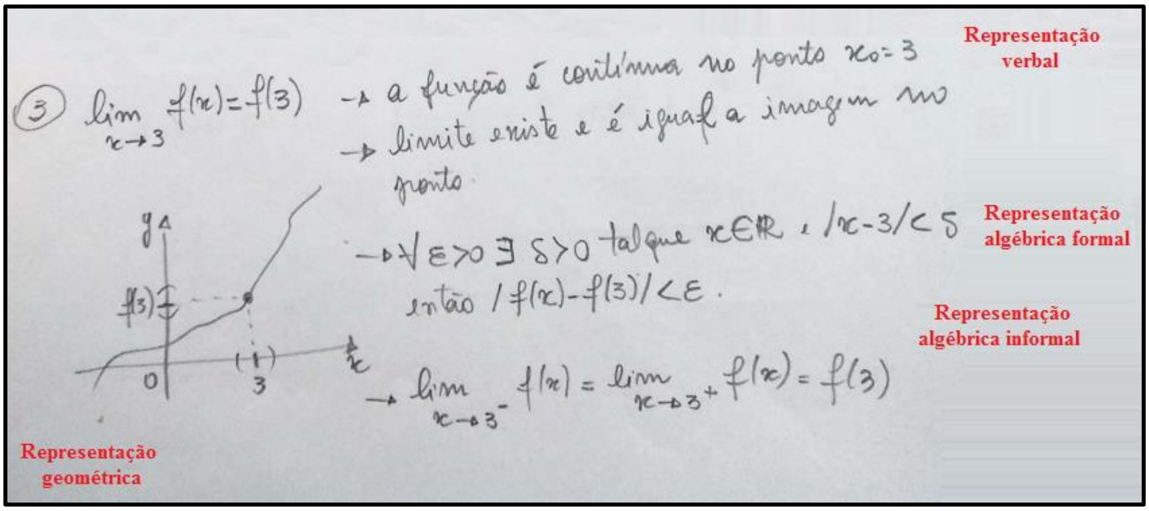


Figura 8.2.11 – Resposta apresentada por Pedro à Q_3E_F

8.2.4. Síntese

Em síntese, a análise dos dados revela que a generalidade dos estudantes demonstrou facilidade em expressar representações geométricas do conceito de continuidade ao representar gráficos de funções contínuas e ao *converterem* geometricamente a definição formal de continuidade, realizando *tratamentos* corretos dos registos geométricos, alguns dos quais apoiados na expressão algébrica da definição formal de continuidade.

Também a maioria dos estudantes foi capaz de deduzir, autonomamente, os critérios de continuidade de uma função no ponto, e expressá-los de forma verbal ou algébrica pela igualdade $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, salientando a necessidade da existência do $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e $f(x_0)$ ser garantida. Há evidências de que os dois grupos que não conseguiram alcançar essa aprendizagem no início do estudo (tarefa T_{13}), superaram as dificuldades iniciais e foram capazes de usar a igualdade $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ para representar e justificar a (des)continuidade de funções representada geometricamente (T_{14} e T_{16}) ou pela expressão algébrica de sua definição formal (T_{15}).

Quando solicitados a interpretar e decidir sobre a (des)continuidade de uma função, representada geometricamente ou algebricamente por sua definição formal, a generalidade dos estudantes recorreram predominantemente à representação verbal para explicar adequadamente as simbologias que traduzem o conceito, complementando-a com registos algébricos que traduzem igualmente o conceito, baseada na igualdade $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, evidenciando terem sido capazes de reconhecer a (des)continuidade das funções nas referidas representações.

Estes resultados mostram que, em geral, os estudantes foram capazes de realizar conexões adequadas e corretas das diferentes representações do conceito de continuidade, apresentando facilidade nas *conversões* e *tratamentos* entre as representações deste conceito.

Ademais, é possível inferir que algumas conexões entre as diferentes representações do conceito de continuidade tenham sido favorecidas por explorações nas *applets* do GeoGebra. Sobre esta conclusão indico que as explorações realizadas pelos estudantes dos seletores $A = f_k(2)$ e k, que produziram deslocamentos do ponto $(2, f_k(2))$ e do comportamento gráfico lateral da função f_k em torno de $x_0 = 2$ $\left(\lim_{x \to 2^-} f_k(x)\right)$, favoreceram a conexão entre as representações algébricas e geométrica da função contínua, que por sua vez permitiu-lhes determinar, geométrica e algebricamente, o valor de k que torna a função f_k contínua (tarefa T_{13}).

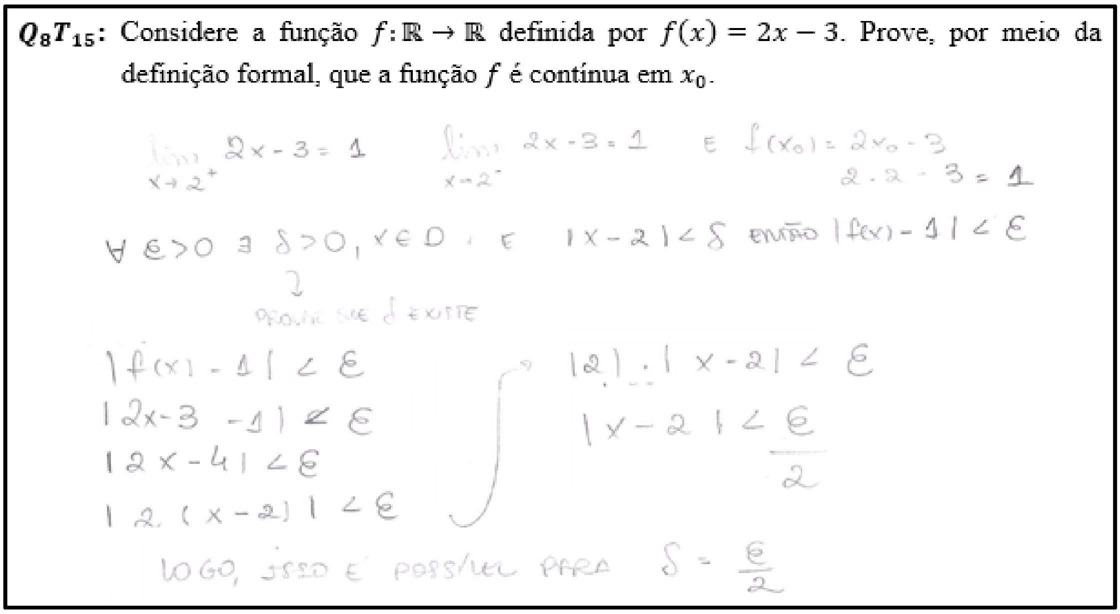
Também se verifica que as explorações numéricas das medidas da caixa, acompanhadas de simulações da sua planificação e formato tridimensional, favoreceu a conexão entre o gráfico da função que descreve volume de uma caixa de formato paralelepípedo, sua planificação e forma espacial, o qual conduziu à representação algébrica da função contínua que modela o volume da caixa (T_{14}). Por fim, nas simulações de parâmetros k e d, que geravam simulações do comportamento gráfico lateral da função f em torno de $x = x_0$ $\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x)\right)$, e de pontos $N = (x, d)$ de interseção entre a reta $y = d$ e o gráfico de f, verifica-se que permitiram a coordenação dos registos algébricos dos pressupostos do TVI aos respetivos registos geométricos, no GeoGebra, favorecendo o reconhecimento da continuidade como o critério para garantir a existência de $x_0 \in]a, b[$ tal que $f(x_0) = d$, com $d \in]f(a), f(b)[$.

8.3. Resolução de problemas que envolvem o conceito de continuidade

No que respeita à resolução de problemas, os estudantes foram desafiados a mobilizar os seus conhecimentos sobre o conceito de continuidade de uma função para: (i) analisar proposições algébricas que envolvem o conceito de continuidade ou o TVI, provando-as ou justificando as incorreções nelas presentes; e (ii) resolver problemas que apelam à modelação matemática e que envolve aplicação dos critérios de continuidade ou do TVI.

8.3.1. Resolução de problemas que remetem à análise de proposições matemáticas

A capacidade de mobilizar conhecimentos do conceito de continuidade para analisar proposições matemáticas que o envolve, começa por ser analisada na questão Q_8T_{15}, que pedia aos estudantes para provarem, usando a definição formal de continuidade, que a função $f(x) = 2x - 3$ era contínua em $x_0 = 2$. Apenas quatro grupos aplicaram corretamente a definição formal para provar a continuidade. As respostas destes grupos contêm indicações da necessidade de encontrar δ em função de ε que tornam as desigualdades $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ verdadeiras, conforme se verifica na resposta de Fátima e Miriam (figura 8.3.1).



Q_8T_{15}: Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 3$. Prove, por meio da definição formal, que a função f é contínua em x_0.

$\lim_{x \to 2^+} 2x - 3 = 1$ $\quad \lim_{x \to 2^-} 2x - 3 = 1$ $\quad$ e $f(x_0) = 2x_0 - 3$

$2 \cdot 2 - 3 = 1$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0, x \in D$ e $|x - 2| < \delta$ então $|f(x) - 1| < \varepsilon$

PROVAR QUE δ EXISTE

$|f(x) - 1| < \varepsilon$

$|2x - 3 - 1| < \varepsilon$

$|2x - 4| < \varepsilon$

$|2 \cdot (x - 2)| < \varepsilon$

$|2| \cdot |x - 2| < \varepsilon$

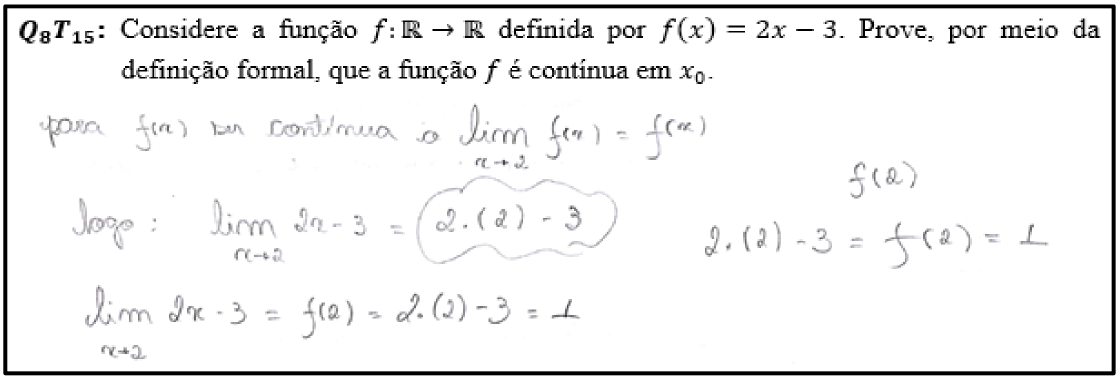
$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$

LOGO, ISSO É POSSÍVEL PARA $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

Figura 8.3.1 – Resposta do par Fátima e Miriam à Q_8T_{15}

Este par de estudantes traduz algebricamente a continuidade da função f em x_0 por $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$, tendo calculado corretamente o valor de $f(2) = 1$. Na sequência, traduz a continuidade formalmente pela expressão $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0, x \in D$ e $|x - 1| < \delta$ então $|f(x) - 1| < \varepsilon$, revelando conhecimento correto da definição formal de continuidade. Ademais, indica a necessidade de determinar δ que valida a inequação $|f(x) - 1| < \varepsilon$, resolve-a corretamente encontrando o valor de δ em função de ε e conclui: "logo isso é possível para $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$", revelando ter sido capaz de aplicar a definição formal de continuidade para provar que a função $f(x) = 2x - 3$ é contínua em $x_0 = 2$.

Os restantes quatro grupos não aplicaram a definição formal de continuidade para provar que função f é contínua em x_0. Destes grupos, o par Miguel e Paulo recorreu à aplicação correta da igualdade $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ para provar a continuidade, tendo calculado corretamente o $\lim_{x \to 2} f(x)$ e $f(2)$, Uma vez que o enunciado da Q_8T_{15} exigia o uso da definição formal de continuidade, a resposta desse par evidencia falta de compreensão desses estudantes sobre o papel e a necessidade do uso dessa definição numa demonstração da continuidade (figura 8.3.2).



Q_8T_{15}: Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x-3$. Prove, por meio da definição formal, que a função f é contínua em x_0.

para $f(x)$ ser contínua o $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(x)$

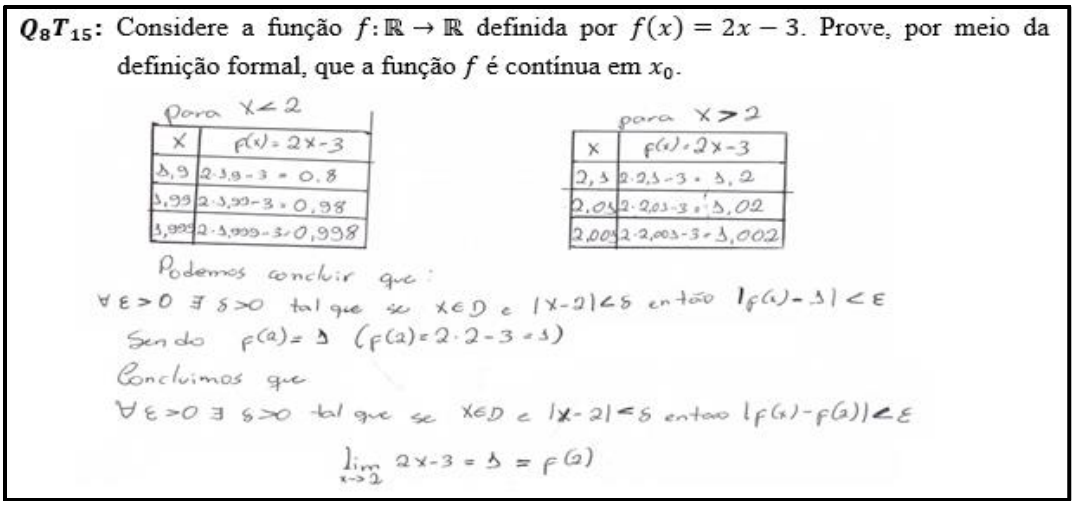
$f(2)$

Logo: $\lim\limits_{x\to 2} 2x-3 = 2.(2)-3$ $\quad$ $2.(2)-3 = f(2) = 1$

$\lim\limits_{x\to 2} 2x-3 = f(2) = 2.(2)-3 = 1$

Figura 8.3.2 – Resposta do par Miguel e Paulo à Q_8T_{15}

Os outros três grupos, apesar de terem escrito corretamente a definição formal de $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$, não a usaram para concluir sobre a existência de limite e provar a continuidade. Tal como se pode observar na reposta de Gil e Maria que recorreram: (i) à noção intuitiva das aproximações $x \to 2$ e $f(x) \to f(2)$, com suporte de tabelas, para analisar os limites laterais em $x_0 = 2$ e concluir sobre o valor do $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$ e, com base nessa conclusão, apenas expressaram o referido limite por sua definição formal, não se apercebendo da necessidade de determinar δ em função de ε que a valida (figura 8.3.3).



Q_8T_{15}: Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x-3$. Prove, por meio da definição formal, que a função f é contínua em x_0.

para $x<2$

x	$f(x)=2x-3$
1,9	$2\cdot1,9-3 = 0,8$
1,99	$2\cdot1,99-3 = 0,98$
1,999	$2\cdot1,999-3 = 0,998$

para $x>2$

x	$f(x)=2x-3$
2,1	$2\cdot2,1-3 = 1,2$
2,01	$2\cdot2,01-3 = 1,02$
2,001	$2\cdot2,001-3 = 1,002$

Podemos concluir que:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que se $x\in D$ e $|x-2|<\delta$ então $|f(x)-1|<\varepsilon$

Sendo $f(2)=1$ $(f(2)=2\cdot2-3=1)$

Concluimos que

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que se $x\in D$ e $|x-2|<\delta$ então $|f(x)-f(2)|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to 2} 2x-3 = 1 = f(2)$

Figura 8.3.3 – Resposta do par Gil e Maria à Q_8T_{15}

Na questão Q_3T_{17}, os estudantes analisaram em seus 4 itens proposições algébricas que envolve o conceito de continuidade e os pressupostos do TVI, a fim de identificar e justificar a veracidade ou incorreções nelas presente. No item **a)** todos os grupos foram capazes de identificar o erro da afirmação $f(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$ nas condições descritas na proposição: “Se f é uma função contínua com $f(0) > 0$ e

$f(1) > 0$ então teremos que $f(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$". Também foram capazes de aplicar conhecimentos sobre funções contínuas (domínio da função, conjunto imagem, gráfico) para justificá-lo, mediante a apresentação de um exemplo gráfico de uma função que contradiz esta afirmação, como se evidencia na resposta de André e Talita $(Q_{3.a)}T_{17})$ e no seu diálogo com o professor no momento de sua resolução (figura 8.3.4).

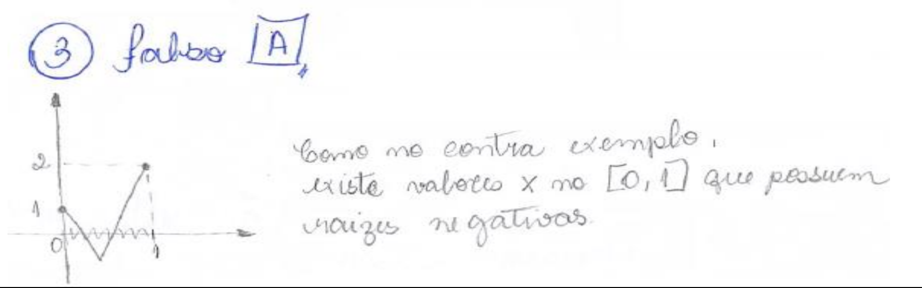
Diálogo	**André:** Vamos ver: $f(0) > 0$, então é positiva. A $f(1)$ também é maior que zero. Pode ser aqui, aqui ou aqui! Mas vamos dizer que a $f(1)$ seja, sei lá, 2. Algum número pode ter uma imagem aqui [mostra $f(x) < 0$ no gráfico]. Isto não é garantia para todos. Ele fala que $f(0)$ e $f(1)$ são positivas, então todas as imagens de valores entre 0 e 1 são positivas? **Talita:** Não. **André:** Aí que está. Que $f(x) > 0$ para todo $x \epsilon [0,1]$, isto não é verdade. **Talita:** Não é verdade não! **André:** Podemos apresentar este exemplo? Professor! [chama o professor] Professor, vamos lá. Na questão $3.a)$ ele fala que f é uma função continua com as imagens $f(0)$ e $f(1)$ positivas. Então qualquer número que eu pegar entre 0 e 1 vai ter uma imagem positiva. **Professor:** Sim. Isso é verdadeiro? **André:** Eu acho que não, veja no nosso gráfico. **Professor:** Esta função existe? **André:** Sim. Eu criei agora. Pode acontecer da função possuir raízes [imagens] negativas. **Professor:** Sim, este é um contraexemplo.
Resposta	

Figura 8.3.4 – Diálogo do par André e Talita com o professor e sua resposta à $Q_{3.a)}T_{17}$

Ao analisar a proposição, André decide representar geometricamente as hipóteses da proposição, nomeadamente $f(0) > 0$ e $f(1) > 0$ e o gráfico de uma função que contenha $f(0)$ e $f(1)$. Os seus conhecimentos sobre a continuidade de uma função conduzem o estudante a representar graficamente uma função que satisfaz as condições do problema mas que contradiz a afirmação de $f(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$, pois afirma: "Algum número pode ter uma imagem aqui [mostra $f(x) < 0$ no gráfico]. Isto não é garantia para todos". Apoiada nesta representação, Mariana identifica o erro da afirmação $f(x) > 0$ para todo $x \epsilon [0,1]$, ao responder "Não é verdade não!" ao questionamento de André sobre sua veracidade. Ao ser questionado pelos estudantes se a justificação baseada na apresentação de exemplo seria considerada válida, o professor explica que o gráfico por eles apresentado é um contraexemplo, e que este tipo de argumento baseado em contraexemplos, muitas vezes pode ser usado para justificar uma afirmação matemática falsa.

No item **b)** Se f é uma função em que $f(1) > 0 > f(2)$ então f possui raiz em $(1,2)$, cinco pares de estudantes identificaram que a continuidade da função f em [1,2] era uma condição necessária para que a afirmação "f possui raiz em $(1,2)$" fosse válida e justificaram corretamente mediante apresentação de contraexemplos de gráficos de funções descontínuas em [1,2], tal como se verifica no diálogo de Cláudio e Pedro na resolução deste item e sua resposta (figura 8.3.5).

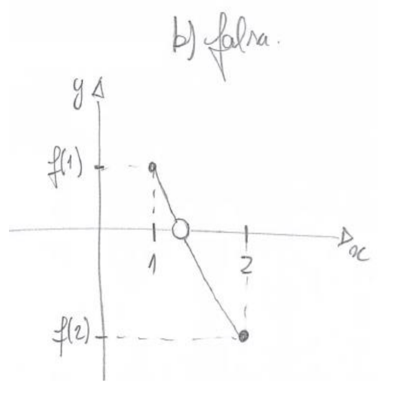
Diálogo na resolução da $\boldsymbol{Q_{3.b)}T_{17}}$	Resposta da $\boldsymbol{Q_{3.b)}T_{17}}$
Pedro: item b) Se f é uma função, não diz que é contínua, com $f(1) > 0$). Tá aqui [representa $(1, f(1))$ no 1º quadrante]. E zero é maior que $f(2)$, é isso? **Cláudio:** Sim, isso significa que $f(2)$ fica lá em baixo [indica 4º quadrante]. **Pedro:** então f possui raiz em [0,1]? Sim [representa um gráfico contendo $(1, f(1))$ e $(2, f(2))$]. **Cláudio:** Porquê? **Pedro:** Olha só [mostra o seu gráfico] **Cláudio:** Ela é contínua? Pode ter isso aqui [coloca bola aberta no ponto que corta o eixo x]. **Pedro:** Ah, tá. Este é um contraexemplo.	

Figura 8.3.5 – Diálogo de Cláudio e Pedro e sua resposta à $Q_{3.b)}T_{17}$

Estes estudantes analisaram juntos as condições da proposição (f é uma função, $f(1) > 0$ e $f(2) < 0$), identificando nelas que a continuidade da função não é garantida e traduzindo-as por registos geométricos no plano cartesiano para construir a sua conclusão. Pedro conclui incorretamente que f possui raiz em $(1,2)$ e justifica com o gráfico de uma função contínua em [1,2]. Cláudio corrige-o, justificando que o fato da continuidade da função f não ser garantida, lhe permite considerar uma função descontínua no ponto de raiz (corta o eixo x) e que satisfaz as condições do problema. Estes estudantes identificam o erro da afirmação "f possui raiz em $(1,2)$" nas condições apresentadas no item **b)** e apresentam o gráfico de uma função descontínua como um contraexemplo para justificá-lo (($Q_{3.b)}T_{17}$)).

Os dois pares restantes não conseguiram identificar e justificar o erro no item **b)**. Estes estudantes consideraram que a função f era contínua em [1,2], traduziram geometricamente as condições da proposição no gráfico de uma função, concluindo que era possível a existência da raiz. Ainda assim, não se aperceberam que, no caso da continuidade ser satisfeita, deveriam confirmar a veracidade dos pressupostos do TVI nas hipóteses apresentadas na proposição para justificar a existência da raiz, tal como se evidencia na resposta de Eliseu e Vítor (figura 8.3.6).

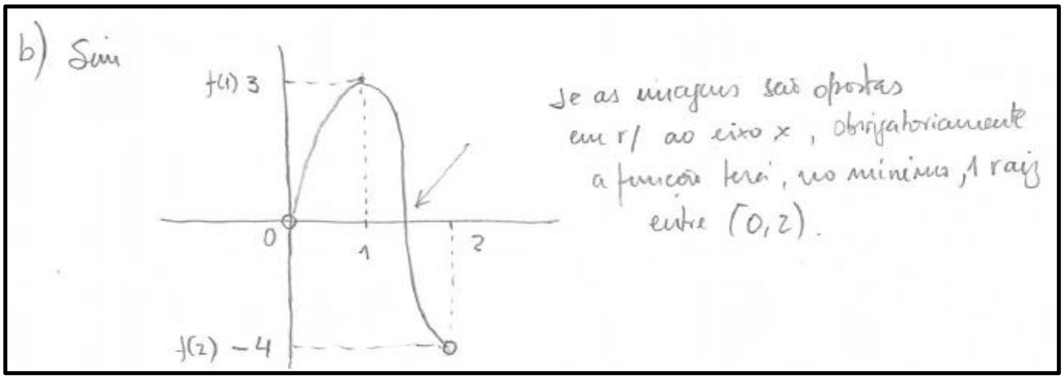


Figura 8.3.6 – Resposta de Eliseu e Vítor à $Q_{3.b)}T_{17}$

No item **c)** "Se f é uma função contínua em $[2,4]$ com $f(2) \cdot f(4) < 0$ então teremos que existe $c \in]2,4[$ tal que $f(c) = 0$", dois pares não conseguiram resolvê-lo corretamente. O par Eliseu e Vítor não apresentou resposta a este item enquanto que o par Gil e Maria evidenciou não ter sido capaz de aplicar o TVI para resolvê-lo. Na resposta apresentada por este par de estudantes (figura 8.3.7) verifica-se que eles se aperceberam que a função deveria ser contínua em todos os pontos $x \in]2,4[$ e não somente no seu domínio. Para além disso, os estudantes basearam-se numa conceção incorreta de associar o zero de uma função "ponto que anula a função" ao ponto de descontinuidade de uma função racional "causa denominador igual a 0 (zero)", confirmando-a com um registo geométrico de uma função para concluir que a afirmação "$c \in]2,4[$ tal que $f(c) = 0$" era falsa.

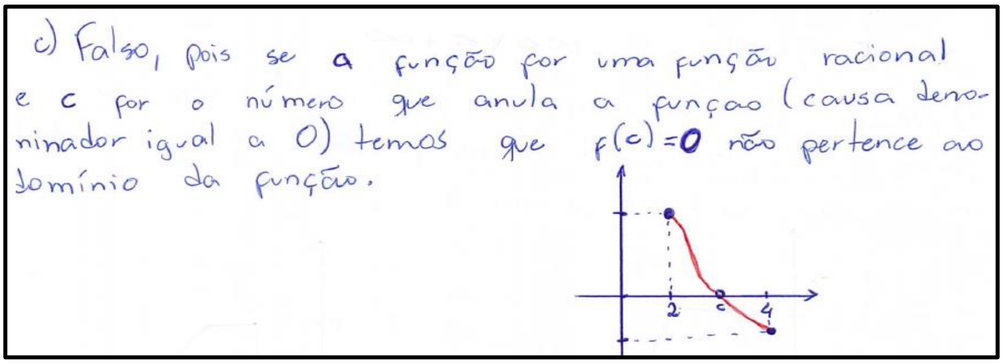


Figura 8.3.7 – Resposta de Gil e Maria à $Q_{3.c)}T_{17}$

Os demais cinco pares de estudantes foram capazes de mobilizar conhecimentos intuitivos dos pressupostos do TVI na proposição, nomeadamente, $f(2) < 0 < f(4)$ ou $f(4) < 0 < f(2)$, e que a função f era contínua, e utilizá-los para justificar corretamente a existência de $c \in]2,4[$ tal que $f(c) = 0$. O par Fátima e Miriam, por exemplo, apresentou significado correto da simbologia $f(2) \cdot f(4) < 0$, concluindo que as imagens $f(2)$ e $f(4)$ possuíam sinais simétricos, ou seja $f(2) < 0 < f(4)$ ou $f(4) < 0 < f(2)$. A partir deste conhecimento, elas constroem a representação geométrica de uma função continua em $[2,4]$, optando por registar $f(2) < 0$ e $f(4) > 0$ para apoiar as suas conclusões, e conseguem associar a existência de $f(c) = 0$ com a existência de um zero da função. Apoiados nesta representação geométrica este par de estudantes concluiu que de facto existe $c \in]2,4[$ tal que $f(c) = 0$, como se evidencia no diálogo seguinte e na sua resposta ao item **c)** (figura 8.3.8).

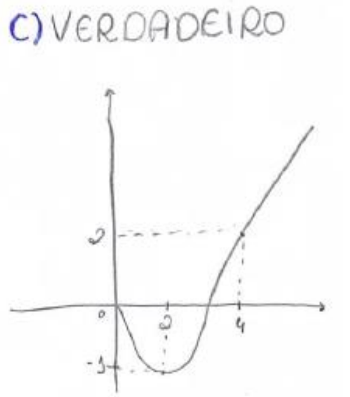
Diálogo na resolução da $Q_{3.c)}T_{17}$.	**Resposta da $Q_{3.c)}T_{17}$.**
Miriam: Está falando que é contínua né? **Fátima:** Sim. Espera aí, $f(2) \cdot f(4) < 0$, ou seja, tem que ser negativo. Então ou $f(2) > 0$ ou $f(4) > 0$ e o outro é negativo. **Miriam:** Sim. **Fátima:** Vamos lá. Aqui é o 2 e aqui é 4. Que existe $c \in]2,4[$ tal que $f(c) = 0$. Isto é uma outra forma de dizer raiz de uma função né? Qual que você quer que seja negativo ou positivo? **Miriam:** Tanto faz **Fátima:** Se eu colocar $f(2) > 0$ e $f(4) < 0$ vai ter que descer [gráfico de f] mas se eu colocar $f(2) > 0$ e $f(4) < 0$, ela vai subir. São exemplos diferentes. **Miriam:** Ah entendi! Então tem um ponto entre 2 e 4 que seja raiz? **Fátima:** É porque tem um ponto aqui, que a imagem deste ponto é igual a zero. A função cortará o eixo x. **Miriam:** É verdadeiro então.	

Figura 8.3.8 – Diálogo do par Fátima e Miriam e sua resposta à $Q_{3.c)}T_{17}$

Por fim, no item **d)**, todos os pares reconheceram o erro na afirmação "**não** existe $c \in]2,4[$ tal que $f(c) = k$" a partir das hipóteses do problema "Se f é uma função contínua com $k < f(2) < f(4)$ então **não** existe $c \in]2,4[$ tal que $f(c) = k$" e foram capazes de aplicar conhecimentos sobre continuidade de funções para justificá-lo, apoiando-se na representação geométrica de funções contínuas. O diálogo entre André e Talita durante a resolução e a sua resposta a esta questão (figura 8.3.9) confirmam isso.

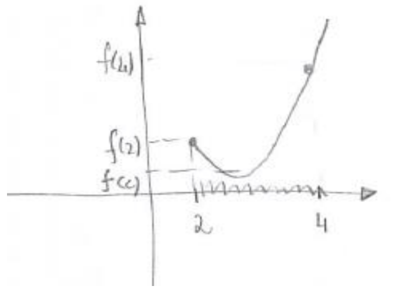
Diálogo na resolução da $Q_{3.d)}T_{17}$.	**Resposta da $Q_{3.d)}T_{17}$.**
Talita: Eu acho que é falsa. **André:** Ela é falsa porque pode existir um número. A gente não sabe qual vai ser esse número. Tem que fazer um contraexemplo, ou seja, achar um **c** entre os dois ($2\ e\ 4$) que tem uma imagem que é menor que as imagens destes dois. **Talita:** Então, aqui uma parábola. Que existe um número entre os dois, nesse intervalo, que sua imagem é menor que $f(2)$ e $f(4)$. Isso aqui é $f(c)$. **André:** Isso mesmo! f(c) é menor. Vamos dizer que aqui -4, qui é 2 e aqui é 4. Tá certo? **Talita:** Nem precisa ser aí em baixo. Pode ser aqui, óh... De qualquer jeito é um c que tem $f(c)$ menor que $f(2)$ e $f(4)$, e o **c** está entre 2 e 4. **André:** Ok.	d) falso 

Figura 8.3.9 – Diálogo do par André e Talita e sua resposta à $Q_{3.d)}T_{17}$

No diálogo, após a leitura do enunciado do item b), estes estudantes posicionam-se contrários à afirmação de que não existe $c \in]2,4[$ tal que $f(c) = k$ e optam por procurar um contraexemplo que confirme esta sua posição. De forma conjunta, constroem a representação geométrica de uma função contínua em [2,4], contendo registos geométricos das hipóteses do problema, no intuito de testar a veracidade da referida afirmação. Verificam que o exemplo que construíram satisfaz as hipóteses do problema e contradiz a afirmação de que não existe $c \in]2,4[$ tal que $f(c) = k$.

8.3.2. Resolução de problemas que apelam à modelação matemática e requerem a aplicação dos critérios de continuidade ou do teorema do valor intermédio

Relativamente a mobilização de conhecimentos sobre o conceito de continuidade e os pressupostos do TVI, para resolver problemas que apelam à modelação matemática que os envolvem, começa por ser analisada na questão Q_6T_{13}, que pretendia verificar se os estudantes eram capazes de resolver problema que envolve a aplicação dos critérios de continuidade. Os dados mostram que todos os seis grupos de estudantes foram capazes de mobilizar conhecimentos sobre a existência do $\lim_{x\to x_0} f(x)$, como condição necessária para garantir a continuidade de uma função, e aplicá-lo para determinar algebricamente o valor de k, que torna a função $f_k(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + kx + 2 & se \quad x < 2 \\ 2x + 3 & se \quad x > 2 \\ A & se \quad x = 2 \end{cases}$ contínua em $x = 2$. Há evidências de que explorações dinâmicas no gráfico de f_k favoreceu a conexão entre registos algébricos e geométrico associado à continuidade de f_k e permitiu aos estudantes descobrirem que a igualdade $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ garante a continuidade de uma função f no ponto $x = x_0$. A partir dessa descoberta, foram capazes de calcular os limites laterais de f_k em $x_0 = 2$, igualando-os, para provar que $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ e determinar o valor de k que garante a continuidade de f_k em $x = 2$, como exemplificado no diálogo do par Fátima e Miriam e na sua resposta a esta questão (figura 8.3.10).

Diálogo de Fátima e Miriam

Miriam: Tem de calcular o $\lim_{x \to 2} f(x)$ [após fazer na *applet* $f_k(2) = 7$ e $k = 0{,}5$ e visualizar o gráfico de f_k]. Bom, para $x > 2$ [analisa o gráfico de f_k]. [...] À direita são valores maiores ou seja $\lim_{x \to 2^+} 2x + 3 = 4 + 3 = 7$ [associa os registos geométrico e algébrico do $\lim_{x \to 2^+} f_k(x)$]. À esquerda é $x^3 - x^2$ [associa os registos geométrico e algébrico do $\lim_{x \to 2^-} f_k(x)$ e é interrompida por Fátima]

Fátima: Está conseguindo fazer Miriam?

Miriam: Sim, $+kx + 2$ que fica ... $6 + 2x$ [calcula $\lim_{x \to 2^-} x^3 - x^2 + kx + 2$]. É igual a 7? ... [resolve a equação $6 + 2k = 7$], $k = 0{,}5$!

Fátima: Você conseguiu? Como você fez?

Miriam: Eu igualei as funções [refere-se $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$]. Para haver a continuidade tem que existir o limite. Só que para existir o limite o comportamento tanto pela direita quanto pela esquerda tem que ser igual, certo? [faz na *applet* $f_k(2) = 7$ e $k = 0{,}5$ de forma visualiza o gráfico de f_k]

Fátima: Sim.

Miriam: Então eu igualei esta daqui [$\lim_{x \to 2^+} 2x + 3$] ao limite da outra, ou seja, que é quando $k = 0{,}5$. Entendeu?

Fátima: Você fez isso aqui [refere-se $\lim_{x \to 2^-} x^3 - x^2 + kx + 2$] e achou isso aqui [$6 + 2k$]. Aí você pegou isso daqui e igualou a 7 [examina a resolução]. Ok, entendi!

Q_6T_{13}: O que é necessário para garantir a continuidade desse comportamento em torno de $x_0 = 2$? Isso é suficiente para que a função seja contínua em $x_0 = 2$? Justifique.

OS LIMITES TANTO PELA ESQUERDA QUANTO PELA DIREITA DEVEM SER IGUAIS

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} L(x) \rightarrow \lim_{x \to 2^+} 2x + 3 = 2.2 + 3 = 7$

$\lim_{x \to 2^-} x^3 - x^2 + Kx + 2 = 6 + 2K$

$6 + 2K = 7$

$2K = 1$

$K = 0{,}5$

Figura 8.3.10 – Diálogo do par Fátima e Miriam e sua resposta à Q_6T_{13}

No diálogo verifica-se que as explorações realizadas por Miriam no GeoGebra possibilitaram-lhe reconhecer que para existir a continuidade da função f_k em $x = 2$ era necessário que existisse $\lim_{x \to 2} f(x)$, pois faz na *applet* $f_k(2) = 7$ e $k = 0{,}5$, visualiza a continuidade do gráfico de f_k em $x = 2$ e conclui “tem que calcular o $\lim_{x \to 2} f(x)$”, justificando mais a frente que “para haver a continuidade tem que existir o limite. Ademais, essas explorações permitiram-lhe associar os respetivos registos geométrico e algébrico de $\lim_{x \to 2^+} f_k(x)$ e $\lim_{x \to 2^-} f_k(x)$], e descobrir o procedimento algébrico de determinação do k que torna a função f_k contínua em $x_0 = 2$, pois calcula corretamente $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ aplicando procedimentos algébricos. O excerto “Então eu igualei esta daqui [$\lim_{x \to 2} 2x + 3$] ao limite da outra, ou seja, que é quando $k = 0{,}5$" revela que, após igualar os resultados destes limites laterais e resolver uma equação, conseguiu determinar o valor de k que fazia a função ser continua em $x = 2$, conforme se confirma na resposta apresentada por esse par de estudantes à Q_6T_{13}.

Já na Q_7T_{16}, que visava verificar se os estudantes eram capazes de aplicar os pressupostos do TVI para provar que $p(x) = x^7 - 5x^4 + 3$ possui pelo menos uma raiz real no intervalo $[1,2]$, verifica-se que todos os pares conseguiram resolvê-la corretamente. Estes estudantes foram capazes de reconhecer e provar a continuidade da função p em $[1,2]$ e que $p(1) < d < p(2)$. Com base nestes pressupostos, concluíram a existência de $x \in]1,2[$ cuja imagem $p(x_0) = 0$, como exemplificado pela resposta de Gil e Maria (figura 3). Para além disso, verifica-se que experimentações no GeoGebra possibilitaram este par de estudantes, resolver graficamente o problema e delinear a estratégia de sua resolução algébrica, recorrendo à aplicação do TVI.

> **Maria:** Como garantir que tem uma raiz real dentro deste intervalo $[1,2]$? [Q_7] Ele quer uma raiz real no intervalo $[1,2]$. Ela tem que tocar o eixo x neste intervalo $[1,2]$.
>
> **Gil:** Ela é polinomial então é continua. Se ela tiver $f(x) = 0$ ela vai ser contínua? O limite pode ser zero? … Ah pode. Deve ser alguma coisa em torno disso: Vamos colocar no GeoGebra $f(x) = x\text{^}7 - 5 * x\text{^}4 + 3$.
>
> **Maria:** Ela toca o eixo x no intervalo $[1,2]$?
>
> **Gil:** Ela toca o eixo x. Toca sim [visualiza $p(x) = 0$ no *applet*].
>
> **Maria:** Não aproxima muito [faz zoom]. A gente está vendo que tem raiz no intervalo. Tira o zoom, tira o zoom! Não podemos olhar o número e substituir simplesmente. Porque isso aqui [indica o gráfico da função p] é para a gente descobrir qual é o número e garantir que tem. A gente tem que mostrar isso pelos nossos procedimentos.

O diálogo anterior revela que estes estudantes recorreram a experimentações no GeoGebra para resolver graficamente o problema, pois digitam corretamente na sua barra de entrada, o comando "$f(x) = x\text{^}7 - 5 * x\text{^}4 + 3$" para esboçar o gráfico da função p, e a partir de sua observação concluem que esta função possui uma raiz no intervalo $[1,2]$: "Ela toca o eixo x no intervalo $[1,2]$ … Ela toca. Toca sim". Contudo, Maria reforça que esta solução serve apenas para direcioná-los a encontrar uma estratégia de resolução analítica do problema garantindo as condições necessárias de aplicabilidade do TVI. Os estudantes procuram então resolvê-lo seguindo esta estratégia, conforme se pode observar no seguinte diálogo:

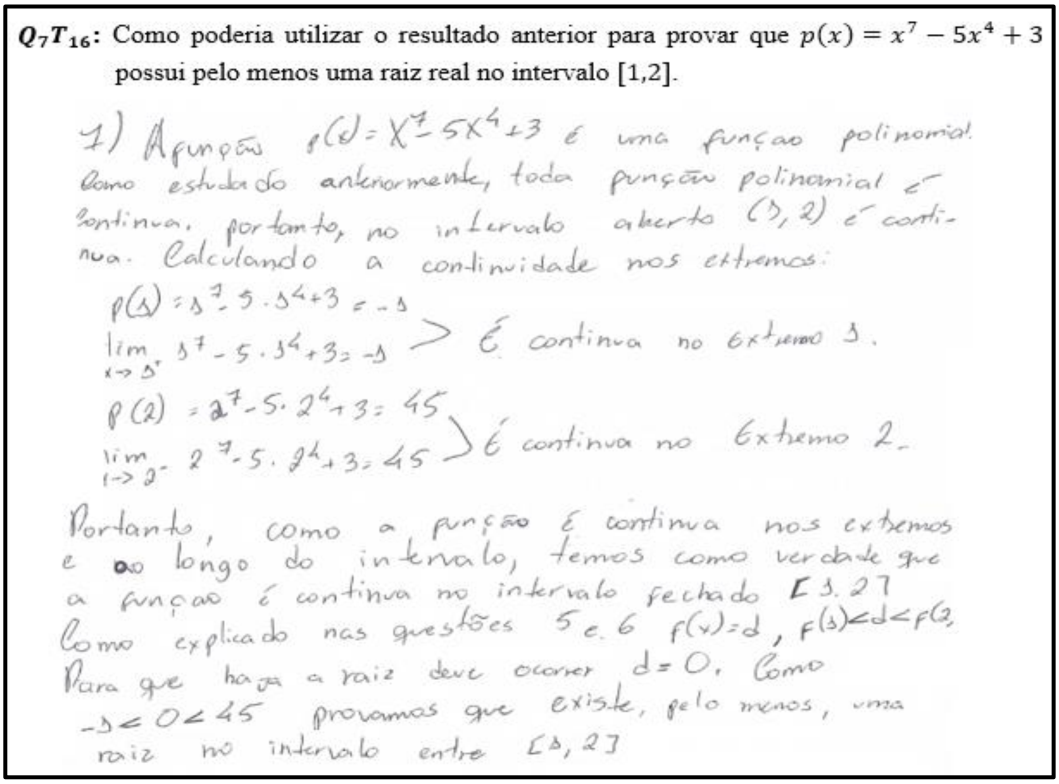
Maria: Como garantir que tem uma raiz real dentro deste intervalo [1,2]? [pausa curta] Ah Gil, entendi! Tem de achar um número dentro deste intervalo[1,2], que corte o eixo x. Lembra do que a gente concluiu anteriormente? [...] Que a condição para existir um valor $x_0 \in [a,b]$ com $f(x_0)$ entre $f(a)$ e $f(b)$ [interrompida por Gil].

Gil: É a continuidade. Então para existir o x_0 a $p(x)$ deve estar dentro de um intervalo?

Maria: Sim! E qual é este intervalo? Eu sei que se substituir $x = 1$ em $p(x)$ vai dar -1.

Gil: Para $x = 2$ temos $p(2) = 128 - 5 \times 16 + 3$, que dá 45 ... [aplicam o TVI].

Este diálogo revela que este par foi capaz de mobilizar conhecimentos sobre as condições necessárias de aplicabilidade do TVI, de modo a concluir sobre a existência de $x_0 \in [1,2]$ tal que $p(x_0) = 0$, e resolver a Q_7T_{16} (figura 8.3.11).


Q_7T_{16}: Como poderia utilizar o resultado anterior para provar que $p(x) = x^7 - 5x^4 + 3$ possui pelo menos uma raiz real no intervalo [1,2].

1) A função $p(x)=x^7-5x^4+3$ é uma função polinomial. Como estudado anteriormente, toda função polinomial é continua. portanto, no intervalo aberto $(1,2)$ é continua. Calculando a continuidade nos extremos:

$p(1)=1^7-5.1^4+3=-1$
$\lim_{x\to 1^+} 1^7-5.1^4+3=-1$ > É continua no extremo 1.

$p(2)=2^7-5.2^4+3=45$
$\lim_{x\to 2^-} 2^7-5.2^4+3=45$ > É continua no Extremo 2.

Portanto, como a função é continua nos extremos e ao longo do intervalo, temos como verdade que a função é continua no intervalo fechado $[1,2]$. Como explicado nas questões 5 e 6 $f(x)=d$, $f(1)<d<f(2)$. Para que haja a raiz deve ocorrer $d=0$. Como $-1<0<45$ provamos que existe, pelo menos, uma raiz no intervalo entre $[1,2]$

Figura 8.3.11 – Resposta do par Gil e Maria à Q_7T_{16}

A resposta desses estudantes revela que reconheceram as condições necessárias para garantir a existência de $x \in [1,2]$ cuja imagem $p(x_0) = 0$, nomeadamente, a função ser continua em $x \in [1,2]$ e $p(1) < 0 < p(2)$. Além disso, provaram corretamente a continuidade da função p em $[1,2]$, tendo justificado que a função p era contínua em $]1,2[$ por ser uma função polinomial, e aplicado corretamente $\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$ para provar a continuidade lateral da função p nos extremos $x = 1$ e $x = 2$. Também calcularam corretamente o valor de $p(1)$ e $p(2)$ tendo confirmado que a condição $p(1) < d < p(2)$

era satisfeita para $d = 0$. Desta forma, foram capazes de articular todos esses conhecimentos para concluir: “Portanto, … temos … que a função é contínua no intervalo fechado $[1,2]$. Como $-1 < 0 < 45$, provamos que existe, pelo menos, uma raiz no intervalo entre $[1,2]$”, apresentando assim, uma resposta correta à Q_7T_{16}.

No que respeita às questões que pretendiam verificar se os estudantes eram capazes de resolver problemas de modelação matemática, e que envolvem aplicação dos critérios de TVI, os dados revelam que, na Q_1T_{17}, três dos sete pares conseguiram provar a existência de um número real que somado com 2 é igual ao seu cubo. Os estudantes reconheceram que o problema deveria ser resolvido pela aplicação do TVI. A partir daí determinaram a expressão algébrica da função que modela o problema e provaram a sua continuidade no intervalo $[a, b]$ em que está definida. Adicionalmente, foram capazes de reconhecer o número real $d = 0$ (tese do problema) e $f(a) < d < f(b)$ e aplicar o TVI para garantir a existência de x_0 tal que $f(x_0) = 0$, concluindo que x_0 é a solução do problema, tal como se verifica no diálogo de Cláudio e Pedro e na sua resposta a esta questão (figura 8.3.12).

Pedro: Vamos ver: $x^3 - x - 2$. Qual é a raiz desta equação?
Cláudio: A gente pode tentar usar Briot-Ruffini. Mas seria complicado pois teríamos que ter uma raiz real para poder fatorizar. A pergunta é determinar ou verificar se existe?
Pedro: Ele está perguntando se existe.
Cláudio: A gente pode usar o TVI!
Pedro: Pode, a gente tem a função. Será?
Cláudio: A gente tem essa função aqui: $f(x) = x^3 - x - 2$ [resolvem juntos a Q_1T_{17}]

Q_1T_{17}: Existe algum número real que somado com 2 é exatamente igual ao seu cubo?

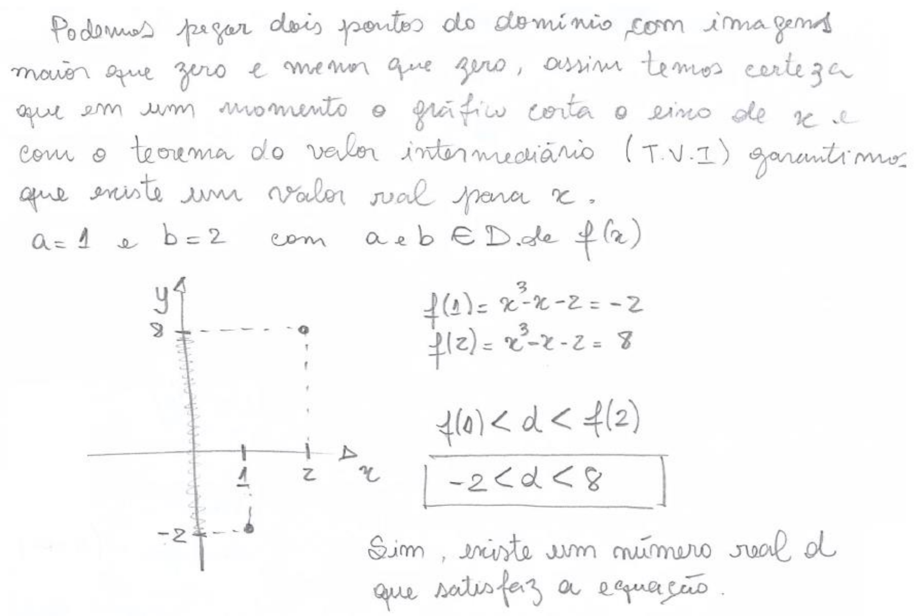


Figura 8.3.12 – Diálogo do par Cláudio e Pedro e sua resposta à Q_1T_{17}

No diálogo, verifica-se que este par de estudante reconheceu que a solução do problema é a solução da equação $x^3 - x - 2 = 0$. Como seria muito difícil resolvê-la por aplicação de algoritmos conhecidos (Briot-Ruffini ou factorização), ao se questionarem se o objetivo do problema era "determinar ou verificar se existe", dão-se conta que deveriam resolvê-la através da aplicação do TVI.

A resposta destes estudantes apresenta uma resolução correta da Q_1T_{17}, incluindo a função que modela o problema ($f(x) = x^3 - x - 2$) e o intervalo fechado $[1,2]$ que a define. Inclui ainda uma demonstração correta da continuidade de f em $[1,2]$, justificando-a nos extremos do intervalo através da aplicação de $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ nos pontos $x_0 = 1$ e $x_0 = 2$, e no intervalo aberto $]1,2[$ por ser uma função polinomial. Ademais, contém indicações de que o pressuposto $f(1) < d < f(2)$ de aplicação do TVI é satisfeito, pois apresenta $d = 0$, $f(1) = -2$, $f(2) = 8$ e $-2 < d < 8$. Estes conhecimentos viabilizaram uma conclusão correta deste estudantes do problema ao responder: "existem um número real que satisfaz a equação".

Os quatro pares restantes, apesar de terem conseguido traduzir o problema algebricamente pela equação $x^3 - x - 2 = 0$, não foram capazes de reconhecer que a sua solução está relacionada com a existência de zero da função $f(x) = x^3 - x - 2$ e aplicar os pressupostos do TVI para justificar existência do zero. Tal observa-se com André e Talita que, para resolver o problema, tentaram resolver a equação $x^3 - x - 2 = 0$ pela aplicação de algoritmos do campo da Álgebra (Fatorização e Briot-Ruffini) e, como não tiveram sucesso, solicitaram a ajuda do professor para orientá-los na sua resolução, o qual pode-se confirmar no diálogo:

Talita: $x^3 - x - 2 = 0$. Pode colocar o x em evidência.

André: Está perguntando se é possível [comentário sobre o enunciado da Q_1T_{17}]. Eu não vejo como resolver esta equação por factorização. Será que pode usar o Briot-Ruffini? O Briot-Ruffini usa um alfa [raiz da função]. Esse alfa agente não tem, seria o x_0. Não se aplicavel. Pode tentar tirar a dúvida com o professor.

Na sequência do diálogo, sem interferir nas respostas dos estudantes, o professor realiza questionamentos para que os estudantes consigam identificar o procedimento correto para a resolução deste problema, nomeadamente, a aplicação do TVI:

Talita: Nós fizemos o que o enunciado diz [$x^3 - x - 2 = 0$]. Chegou um momento que eu fiquei perdida.

Professor: Ele quer que você descubra qual é o valor de x?

Talita: Não, ele quer que mostre que exista.

André: É TVI?

Professor: Você lembra das hipóteses do TVI?

Talita: A função tem que está definida no intervalo fechado [a, b].

Professor: E depois?

André: Ela tem que ser continua nesse intervalo.

Professor: O que mais?

André: Tem que existir uma imagem [d] que tem que está entre as imagens dos extremos.

Professor: A tese seria o quê? O que o TVI garante?

André: Existe x_0 entre a e b e além dele existir, sua imagem tem que ser d.

Professor: Agora com essas ideias vocês tentem resolver o problema.

A partir dos questionamentos, os estudantes revelam a sua conceção correta dos pressupostos do TVI e reconheceram que a existência de solução da equação $x^3 - x - 2 = 0$ seria verificada mediante aplicação deste teorema. Entretanto, a fragilidade revelada por estes estudantes no domínio dos processos e procedimentos da Álgebra, impediu-os de aplicar corretamente o TVI e concluir sobre a existência de solução da equação $x^3 - x - 2 = 0$, pois não foram capazes de associar a solução de $x^3 - x - 2 = 0$ com $f(x) = 0$ $(d = 0)$ e determinar do intervalo fechado $[a, b]$ tal que $f(a) < 0 < f(b)$, desistindo de resolvê-la e apresentando como resposta apenas o registo algébrico da equação que modela o problema (figura 8.3.13).

André: Primeiro nós temos que saber o domínio, o intervalo. Qual será o domínio? […] Vamos ver a função, porque não tem como fazer o domínio sem a função. Qual é a função?

Talita: $f(x) = x^3 - x - 2$.

André: Eu estou achando que a função em si é $f(x) = x + 2$. O x^3 seria a imagem. Porque o TVI garante que tal número terá tal imagem. O que ele (problema) quer saber é isso, se existe algum número que tenha tal imagem. Eu estou achando [interrompido]

Talita: Que não existe esse x? Mas aí vai ficar faltando o zero [na lei da função]. Se eu admitir que $f(x) = x + 2$ … Ah, vamos pular para outra questão.

Q_2T_{17}: Existe algum número real que somado com 2 é exatamente igual ao seu cubo?

1 $X + 2 = X^3$ $X \in \mathbb{R}$

$X^3 - X - 2 = 0$

Figura 8.3.13 – Diálogo do par André e Talita e sua resposta à Q_1T_{17}

Por fim, na Q_2T_{17}, cinco dos sete pares conseguiram resolver satisfatoriamente, mas de forma parcial, um problema real de escalada de uma montanha, modelado matematicamente por funções continuas e resolvido pela aplicação do TVI. Estes estudantes foram capazes de apresentar uma solução gráfica do problema, descrevendo as funções que representam os trajetos de subida e descida do alpinista à montanha, contendo o domínio, contradomínio e representação gráfica, e concluir corretamente que o alpinista, em algum momento da descida, estava na mesma altura e na mesma hora do que na subida do dia anterior. Entretanto não foram capazes de identificar os critérios do TVI na função $h = f - g$ (conforme sugestão no enunciado) para garantir a existência de raiz da função h $(h(c) = 0)$ e provar a veracidade de sua conclusão, conforme exemplificado na resposta de Cláudio e Pedro (figura 8.3.14).

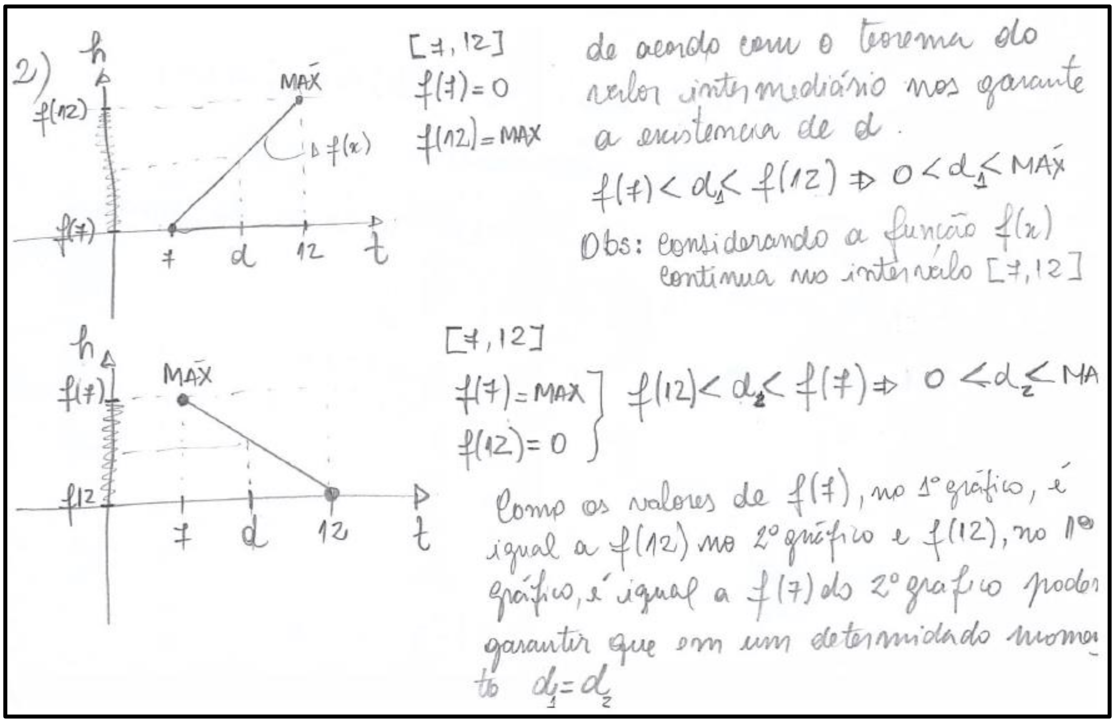
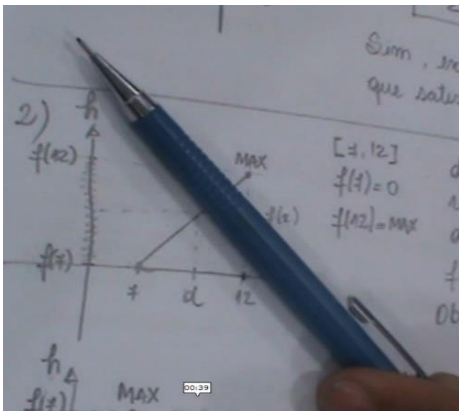


Figura 8.3.14 – Resposta do par Cláudio e Pedro à Q_2T_{17}

Este par apresentou esboços dos gráficos das funções (altura $\times$ tempo) nos trajetos de subida e descida do alpinista da montanha, com registos corretos dos respetivos domínios ($[7,12]$) e contradomínio ($[0, Max]$) e indicações da continuidade de cada função e concluíram corretamente que é possível "garantir que em um determinado momento $d_1 = d_2$". Ao serem questionados pelo professor para explicar sua resolução, responderam (figura 8.3.15):

Pedro: A gente tem um intervalo fechado ([7,12]) e função contínua, no caso, os dois gráficos. No segundo gráfico, a gente analisou que ela é contínua no intervalo fechado [7,12], garantindo a existência de d com $f(7) < d_1 < f(12)$, que seria o mesmo da função de cima pois basta inverter os valores $f(12) < d_2 < f(7)$.

Cláudio: Vou até fazer uma projeção aqui no gráfico [figura ao lado]. Projeta aqui cruzado [usa a lapiseira], você tem o ponto de encontro dos gráficos que mostra que $d_1 = d_2$.



Registo da explicação de Cláudio.

Figura 8.3.15 – Diálogo do par Cláudio e Pedro na resolução da Q_2T_{17}

Para concluir que as funções (subida e descida) possuíam um ponto $(x, f(x))$ comum, este par de estudantes evidencia terem-se baseado no facto das funções serem contínuas e apresentarem o mesmo domínio e contradomínio, pois justificam: "existência de d [...] que seria o mesmo da função de cima pois basta inverter os valores". Além disso, recorrem aos registos gráficos destas funções, no mesmo sistema de coordenadas, para ilustrar geometricamente esta conclusão, tal como se confirma no excerto "Projeta aqui cruzado [usa a lapiseira], você tem o ponto de encontro dos gráficos que mostra que $d_1 = d_2$" e no registo de explicação de Cláudio.

Os dois pares restantes, não conseguiram resolver corretamente o problema. A dificuldade em traduzir do problema as funções continuas que descrevem os deslocamentos de subida e descida do alpinista à montanha, impediram-lhes de concluir que as funções desses deslocamentos possuem pelo menos um ponto comum, garantindo a solução do problema. O par Talita e André não apresentou resposta ao problema, enquanto que o par Gil e Maria, embora apresente resposta à Q_2T_{17} (figura 8.3.16) contendo registos geométricos no plano cartesiano do gráfico da função que descreve os deslocamentos de subida e descida do alpinista à montanha, não foram capazes de articular corretamente estes registos geométricos de forma a identificar um ponto de intersecção dos deslocamentos de subida e descida, que resolve o problema geometricamente.

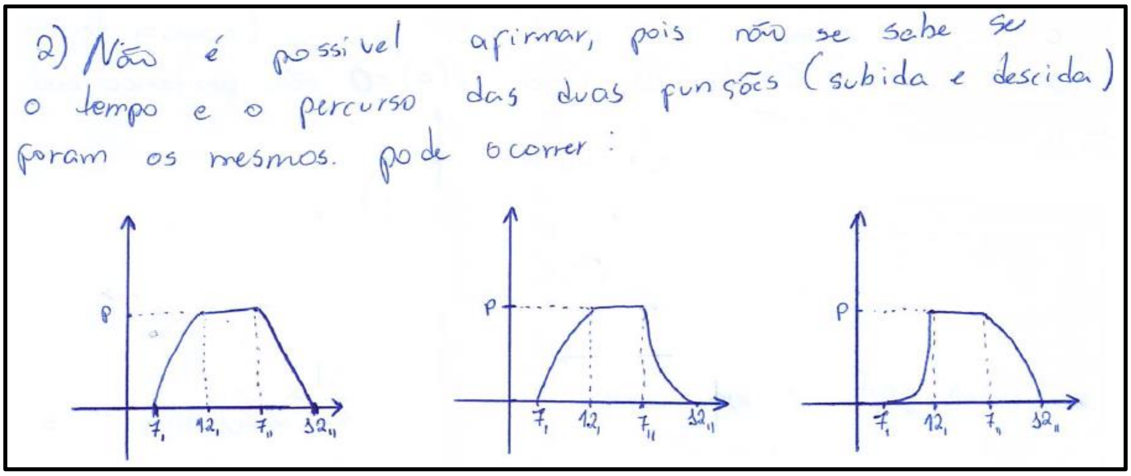


Figura 8.3.16 – Resposta do par Gil e Maria à Q_2T_{17}

Na resposta apresentada, evidencia-se que o erro cometido por esses estudantes em traduzir graficamente os dois deslocamentos (subida e descida) por única função, ao invés de distintas funções contínuas, contendo o mesmo domínio $[7{,}12]$ e contradomínio $[0, h]$, os impediu de perceber que as funções (subida e descida) possuíam um ponto $(x, f(x))$ comum, o qual correspondia à solução do problema.

8.3.3. Síntese

Em síntese, a análise dos dados mostra que somente metade dos estudantes foram capazes de mobilizar os seus conhecimentos sobre a definição formal de continuidade para demonstrar a continuidade de uma função num ponto. A incompreensão do procedimento algébrico para encontrar δ em função de ε que tornam as desigualdades $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ verdadeiras pode ter sido a causa dos demais estudantes, terem recorrido a argumentos baseados em aproximações, ao invés de aplicarem a definição formal para validar a continuidade. Ainda assim, quase todos os pares de estudantes foram capazes de representar algebricamente a continuidade na sua definição formal.

Também se verifica que a generalidade dos estudantes conseguiu analisar proposições algébricas que envolve a aplicação do conceito de continuidade e pressupostos do TVI, provando-as ou justificando as incorreções nelas presentes. Os estudantes recorreram a registos geométricos que traduzem os registos algébricos contidos nestas proposições, analisando se os critérios de continuidade ou os pressupostos do TVI eram nelas satisfeitos, para provar ou justificar as incorreções, apresentando explicações verbais e/ou complementando-a com registos de gráficos de funções (des)contínuas como contraexemplos.

A generalidade dos estudantes revela facilidade em resolver problemas que requerem a aplicação dos critérios de continuidade ou do TVI, quando a expressão analítica da função é apresentada explicitamente no enunciado do problema. Entretanto, quando desafiados a resolverem problemas de modelação matemática que requerem a aplicação do TVI, a maioria dos estudantes apresentou pouco domínio na modelação matemática e dificuldade com a Álgebra. As principais dificuldades foram não conseguir expressar a função adequada que modela o problema e reconhecer os pressupostos do TVI nas condições do problema a fim de o aplicar para concluir a existência de zero de uma função, resolvendo o problema.

Por fim, verifica-se que na resolução de problemas que envolvem a aplicação dos critérios de continuidade e dos pressupostos do TVI, o GeoGebra promoveu a criação de estratégias algébrica e geométrica de resolução desses problemas. Tal conclusão é evidenciada nas explorações do GeoGebra que favoreceu: (i) a coordenação de registos algébrico e geométrico das partes do gráfico da função f_k, e possibilitou os estudantes identificarem geometricamente o valor de k que garante a continuidade da função f_k em $x = 2$, e reconhecer o procedimento algébrico de determiná-lo, mediante a igualdade dos limites laterais em $x = 2$; e (ii) a obtenção simultânea de soluções geométrica e algébrica para um problema que envolve a aplicação do TVI, onde verificou que um par de estudantes recorreu inicialmente ao GeoGebra para a resolver graficamente o problema, esboçando o gráfico da função $p(x)$, e delinear estratégia de sua resolução algébrica.

Capítulo 9

Análise das opiniões dos estudantes sobre a experiência de ensino

Neste capítulo apresento os resultados da análise das respostas dos estudantes ao questionário final (Q_F) e à entrevista final (E_F), que revelam as suas opiniões sobre a experiência de ensino. Esta análise é descritiva e foca-se nas tarefas exploratórias, o uso do GeoGebra e o método de ensino exploratório (a forma como as tarefas foram resolvidas) na aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade. Tem por base as doze questões fechadas do questionário final ($(Q_{1F}, Q_{2F}, \dots, Q_{12F})Q_F$) que são analisadas de forma descritiva e seus resultados apresentado em gráficos de barras. Para ratificar as conclusões, recorro a excertos das suas sete questões abertas ($(Q_{1A}, Q_{2A}, \dots, Q_{7A})Q_F$) e de comentários obtidos na entrevista final (E_F), cuja análise é interpretativa e segundo o método de análise de conteúdo.

9.1. Opiniões dos estudantes sobre as tarefas exploratórias, o uso do GeoGebra e método de ensino exploratório da experiência de ensino

Começo por analisar as questões $(Q_{1F}, Q_{2F}, \dots, Q_{6F})Q_F$ que visavam saber a opinião dos estudantes sobre aspetos relacionados às sequências de tarefas exploratórias, consideradas na experiência de ensino. A análise dos dados mostra que a generalidade dos estudantes reconhece as tarefas exploratórias como um método adequado de ensino e aprendizagem, apresentando um nível de concordância (parcial e total) superior a 80% em todas as questões, conforme se observa na figura 9.1.1.

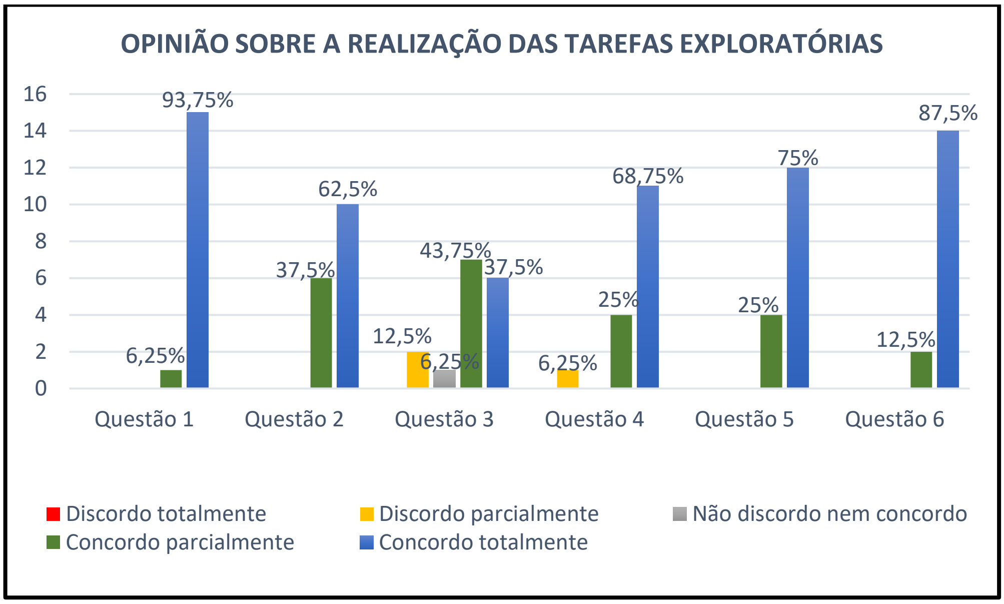


Figura 9.1.1 – Percentagem de respostas às questões $(Q_{1F}, Q_{2F}, \ldots, Q_{6F})Q_F$ de acordo com os graus de concordância sobre as tarefas exploratórias

Para estes estudantes, as tarefas exploratórias revelam-se adequadas ao ensino de limite e continuidade (Q_{1F}), e ajudou-os a compreender melhor os conteúdos programáticos da disciplina de Pré-Cálculo (Q_{5F}) bem como os caminhos a serem tomados para resolver os exercícios propostos (Q_{6F}). Além disso, consideram suficientes as indicações dadas pelo professor para a realização das tarefas (Q_{2F}). Essa conclusão é devida pois os estudantes apresentam níveis de concordância (parcial e total) de 100% em todas essas questões, que foi ratificada pelos seus comentários nas questões abertas, tal como se observa em algumas de suas afirmações (figura 9.1.2).

- [pontos positivos da realização das tarefas] compreender de forma intuitiva algumas questões, como limite, comportamento no infinito, continuidade e outros. (confirma concordância das Q_{1F} e Q_{5F})
- Achei interessante que durante as tarefas nos foi imposto a necessidade de raciocínio. Ou seja, com o uso das tarefas fizemos as mesmas observações e chegamos às mesmas conclusões de quem criou as teorias, e assim, não só gravámos, mas entendemos o porquê de termos que estudá-las. (confirma concordância das Q_{1F}, Q_{5F} e Q_{6F})
- Contribui na hora de abordar e aplicar os conteúdos trabalhado [para resolver exercícios]. Através das tarefas podemos ter um "passo-a-passo" do aprendizado dos conteúdos trabalhados. (confirma concordância da Q_{6F})
- É importante citar que o professor conseguiu influenciar-me a pensar, utilizando esta metodologia [tarefas exploratórias], porém neste trecho posso falar apenas por mim mesmo. Ademais, sempre gostei de Matemática e tento chegar às minhas próprias conclusões, mas o professor reforçou mais ainda esta característica. (confirma concordância da Q_{2F})

Figura 9.1.2 – Respostas de estudantes associadas a realização das tarefas exploratórias, à questão Q_{3A} do questionário final

Também se conclui que realização das tarefas ajudou a generalidade dos estudantes na tarefas seguintes, tal como é confirmado pelo nível de concordância que apresentam na Q_{4F} (93,75%) e exemplificado pelo comentário de um estudante acerca desta questão, nomeadamente, "em algumas repostas não consegui perceber que uma resposta ajudava-me no problema seguinte, porém na maioria das vezes ajudava". Ademais, evidencia-se, que a sequência de tarefas permitiu aos estudantes aprofundar conhecimentos matemáticos prévios, reforçando deste modo as suas aprendizagens. Isso é verificado no comentário de Miriam ao responder ao questionamento do professor-investigador "Alguma coisa que você acha que contribuiu para esclarecer algum conteúdo de matemática?", na entrevista final (figura 9.1.3)

Alguma coisa que você acha que contribuiu para esclarecer algum conteúdo de matemática?
Sim, eu estava falando a respeito disso com os colegas semana passada, que depois que eu passei a ter essas aulas das atividades exploratórias, adquiri uma visão mais ampla da Matemática, que antes era muito restrita. Tipo assim, na função de formato $f(x) = ax + b$ [função Afim], se eu fosse resolver um exercício, só conseguiria enxergar o $f(x)$. Eu não conseguia lembrar que $f(x) = ax + b$. Agora, passei a ter uma visão mais ampla da Matemática. Eu adorei isso! Estou tendo maior facilidade em resolver os exercícios agora. Isso ajudou bastante, não só no conteúdo de limite ou continuidade, mas como eu falei, na área toda da Matemática. Agora eu sou bem mais crítica ao resolver as questões (*comentário de Miriam*).

Figura 9.1.3 – Comentário de Miriam na entrevista final

Esta estudante relata que o seu conhecimento incipiente da Matemática, após a sua experiência com as tarefas exploratórias integrando o GeoGebra, transformou-se e deu-lhe uma "visão mais ampla da Matemática" que possibilitou-lhe resolver com mais facilidade os exercícios propostos, evidenciando, desta forma, o reforço e consolidação de suas aprendizagens.

Por fim, os dados revelam que a generalidade dos estudantes (81,25%) manifestou concordância (parcial ou total) sobre o tempo disponibilizado para a realização das tarefas ter sido suficiente (Q_{3F}). Apesar disso, a discordância de dois estudantes (12,5%), a abstenção de outro (6,25%) em opinar sobre este aspeto (não concorda nem discorda), e alguns comentários apresentados em questões abertas do questionário final, parecem apontar crítica sobre este aspeto, pois sugerem aumento do tempo de realização das tarefas ou diminuição do número de suas questões da tarefa, tal como se observa nos comentários apresentados na figura 9.1.4, com destaque para os excertos neles sublinhados

- Foi a melhor experiência que tive, pois com ela eu pude aprender os conceitos de forma prática. O ponto negativo é o tempo que era pouco para todo o conteúdo no início. (resposta à questão Q_{1F})
- [sugere alterações] Menor número de questões para adequar ao tempo de aula e mais listas de exercícios com gabarito. (resposta à questão Q_{1F})
- Ponto negativo é que o tempo para explorar o mesmo é curto demais. (resposta à questão Q_{2F})

Figura 9.1.4 – Transcrição de opiniões de estudantes associadas ao tempo de realização das tarefas exploratórias ser insuficiente

As opiniões dos estudantes sobre aspetos associados às explorações realizadas no GeoGebra, foram obtidas nas respostas às questões (Q_{7F} e Q_{8F})Q_F que visavam avaliar se estas explorações contribuíram para compreensão dos conceitos matemáticos associados ao limite e continuidade. O nível de concordância e discordância nesse aspeto é apresentado no gráfico da figura 9.1.5.

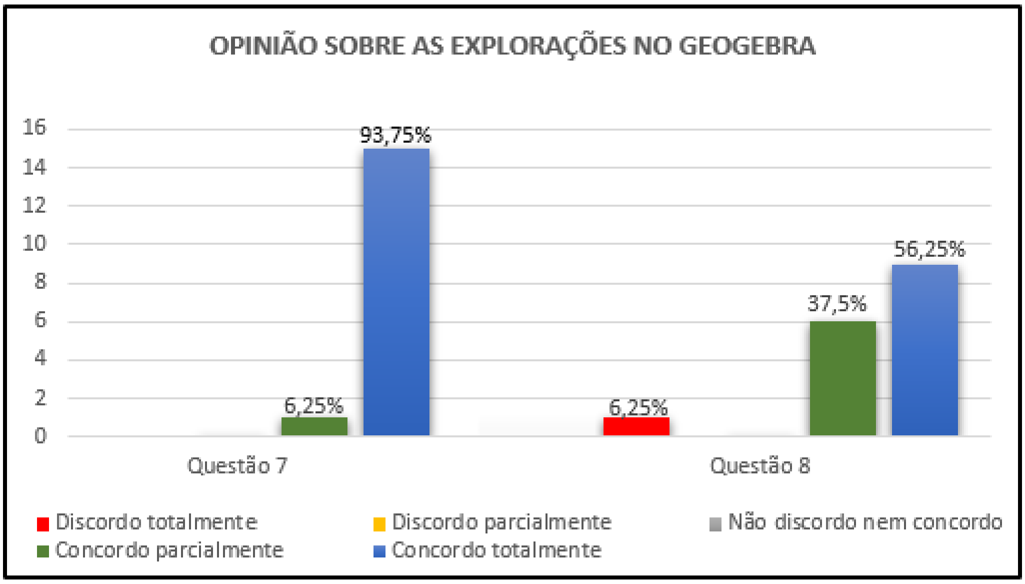


Figura 9.1.5 – Percentagem de respostas às questões (Q_{7F} e Q_{8F})Q_F
de acordo com os graus de concordância sobre as explorações no GeoGebra

Verifica-se que a generalidade dos estudantes concorda quanto às afirmações inerentes aos contributos do GeoGebra para a compreensão dos conceitos matemáticos, especialmente de limite e continuidade (Q_{7F} e Q_{8F}). Esta conclusão é confirmada pelos níveis de concordância (total e parcial) apresentados pelos estudantes na Q_{7F} (100%) e na Q_{8F} (93,75%), e ratificada por alguns de seus comentários à questão aberta Q_{5A}: "E o uso do GeoGebra, de que modo ele contribuiu para essas aprendizagens?" (figura 9.1.6)

- O GeoGebra foi basicamente nossos olhos. Com ele nós podíamos ver o que era difícil de ver na caneta e no papel. No GeoGebra também era possível se questionar o "porquê" de tal função ter tal comportamento, e com isso conseguimos explorar o mesmo em busca de respostas e soluções.
- Contribuiu para a melhor visualização das relações entre as vizinhanças e a definição formal.
- Toda vez que fazíamos uso de fórmulas com algo em comum e as aplicávamos no GeoGebra, notávamos que os gráficos se assemelhavam. Assim pudemos concluir regras e teorias de uma forma mais ampla e melhor observada.

Figura 9.1.6 - Transcrição de opiniões de estudantes associadas as explorações no GeoGebra na compreensão dos conceitos matemáticos ($Q_{5F}Q_F$)

Ademais, revela-se que as explorações no GeoGebra contribuíram para a descoberta, experimentação e visualização dos conceitos de limite e continuidade, favorecendo assim o reconhecimento desses conceitos matemáticos a partir da análise dos gráficos de funções, conforme é exemplificado no excertos do comentário de Eliseu, na entrevista final, ao relatar sobre a sua experiência com as explorações realizadas nas *applets* do GeoGebra, na aprendizagem do limite e continuidade (figura 9.1.7).

> Um ponto que me chamou a atenção foi na tarefa da continuidade da função, que apresentava uma função descontínua que tinha aquele pulo ou salto. Aí, quando a gente mexia o x e o k e levava a função a se conectar, a gente confirmava que a função era contínua. Mas você percebia a diferença entre a função descontínua e a função contínua. Pelo movimento [da função] você conseguia visualizar aquilo [(des)continuidade]. Um outro que eu me recordo muito bem é quando $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$. Eu tinha dificuldade de entender como aquilo (∞) se movimentava para infinito. Estava parado. A gente tinha uma figura estática [registo gráfico] e não vê que ela está tendendo ao infinito. Quando a gente movimenta x no GeoGebra, percebe, quer dizer, estou vendo aqui a imagem, ainda fico vendo a imagem [relata um pensamento], você vai andando com o cursor, e à medida que vai movimentando no eixo x, a gente tá vendo que está subindo ou descendo. A gente vê aquele deslocamento e entende melhor. Então é uma coisa, como eu tinha comentado anteriormente, que eu não tinha tido esta experiência. Mas não existia recurso na época. Tudo o que for em prol de melhor entendimento, acho que é válido. (*comentários de Eliseu na E_F*).

Figura 9.1.7 – Comentário de Eliseu na E_F que se associa ao uso do GeoGebra na aprendizagem do limite e continuidade

Elizeu afirma que as explorações realizadas numa *applet* do GeoGebra, que permitiam alterações dinâmicas no comportamento do gráfico de uma função, de forma a se tornar "contínuo", uma vez que apresentava descontinuidade por 'salto num ponto', permitiu-lhe visualizar e confirmar que a função era contínua, e perceber a diferença entre continuidade e descontinuidade de uma função. Ademais, as explorações no GeoGebra que produziam deslocamentos infinitos de $f(x)$ no gráfico da função, ajudou-o a superar obstáculos quanto ao reconhecimento do processo dinâmico de x tender para infinito, e favoreceu o reconhecimento do limite no infinito. Para este estudante, o dinamismo do comportamento do gráfico da função, produzido pelas explorações no GeoGebra, contrapondo-se ao processo estático de sua representação gráfica, foi o diferencial para alcançar as suas aprendizagens sobre continuidade e limite no infinito, pois afirma: "pelo movimento (da função) você conseguia visualizar aquilo" ((des)continuidade) e "aí a gente vê aquele deslocamento e entende melhor" (limite no infinito).

Por fim, as opiniões dos estudantes sobre o método de ensino exploratório foram obtidas nas suas respostas às questões $(Q_{9F}, Q_{10F}, Q_{11F}$ e $Q_{12F})Q_F$. Este método de ensino, compreende a forma de trabalho colaborativo entre os estudantes no laboratório de informática, descentralizando-se do ambiente de aulas expositivas no quadro com giz, onde as noções dos conceitos matemáticos são construídas através da resolução de tarefas exploratórias com recurso ao GeoGebra, discutidas e sistematizadas pelo professor num momento de discussão coletiva com os estudantes. Os níveis de concordância estão apresentados no gráfico da figura 9.1.8.

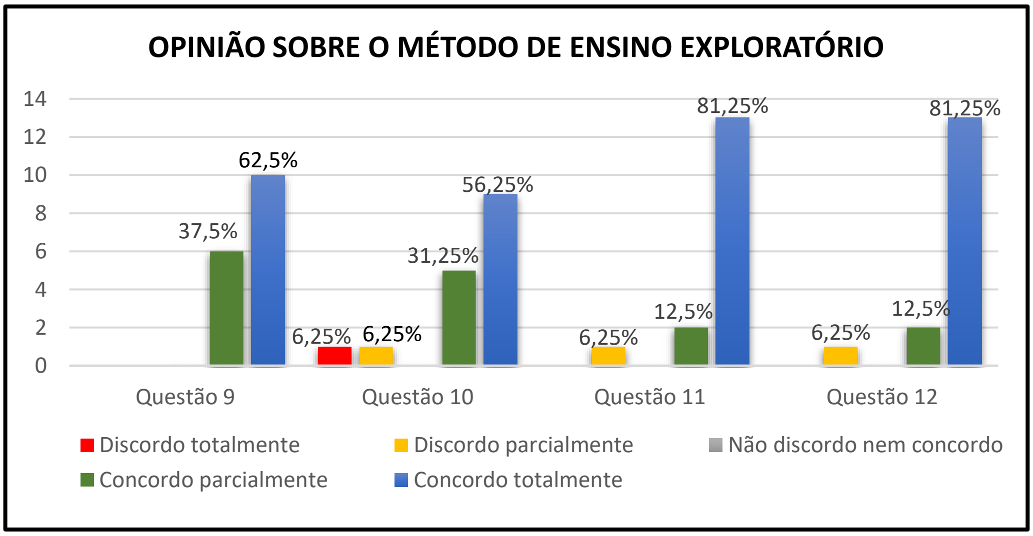


Figura 9.1.8 – Percentagem de respostas às questões $(Q_{9F}, Q_{10F}, Q_{11F}$ e $Q_{12F})Q_F$ de acordo com os graus de concordância sobre o método de ensino exploratório

Verifica-se que o método de ensino exploratório foi reconhecido pela generalidade dos estudantes como eficaz em termo das suas aprendizagens, relativamente aos conteúdos abordados (Q_{11F} e Q_{12F}). Os momentos de discussão coletiva revelaram-se fundamentais para os esclarecimentos de dúvidas e consolidação de conhecimentos construídos ao longo da resolução das tarefas (Q_{9F}) e, também, houve uma adequada ponderação entre aulas expositivas de resolução de exercícios e de realização das tarefas exploratórias (Q_{10F}). Essas conclusões são verificadas pelos níveis de concordância (parcial e total) apresentados pelos estudantes nas questões fechadas Q_{9F} (100%), Q_{10F} (87,5%), Q_{11F} (93,75%) e Q_{12F} (93,75%) e confirmada por seus comentários ao responderem às questões abertas, tal como exemplificada na figura 9.1.9.

- Sempre aprendi melhor com a prática do que com a teoria. O trabalho exploratório me fez pôr em prática toda a teoria trabalhada nas atividades, e assim me ajudou a uma melhor compreensão dos conteúdos. (confirma concordância das Q_{11F} e Q_{12F})
- O trabalho exploratório com o uso do GeoGebra ajudou muito a esclarecer as definições formais de limite e continuidade em uma função no ponto. (confirma concordância das Q_{11F} e Q_{12F})
- Contribuiu ao forçar mais a minha mente, explorando, de fato, o meu potencial. Esse trabalho exploratório juntamente com as discussões com os colegas e professor, colaborou na minha evolução como estudante de matemática. (confirma concordância da Q_{9F})
- Além de facilitar o entendimento, fixou a matéria na minha mente. As repetições, exercícios mais tarefa, fixaram a matéria na minha mente e não esquecerei o que foi aprendido por um bom tempo. (confirma concordância da Q_{10F})
- O trabalho realizado através da utilização do GeoGebra e a realização de tarefas me ajudaram a compreender melhor o ensino de limites. A cada nova tarefa um conteúdo era trabalhado, sempre dando continuidade ao anterior. (confirma concordância da Q_{10F}).

Figura 9.1.9 – Opiniões de estudantes associadas ao método de ensino exploratório

Relativamente as discordâncias observadas nas questões Q_{2F}, Q_{4F}, Q_{7F}, Q_{8F}, Q_{11F} e Q_{12F} e que não foram comentadas anteriormente, uma triangulação realizada com as respostas dessas questões indica que foram apresentadas por um mesmo estudante (93,75%). Essas respostas parecem indicar a sua insatisfação relativamente à metodologia utilizada, mas por vezes, revela alguma contradição nas suas respostas (figura 9.1.10).

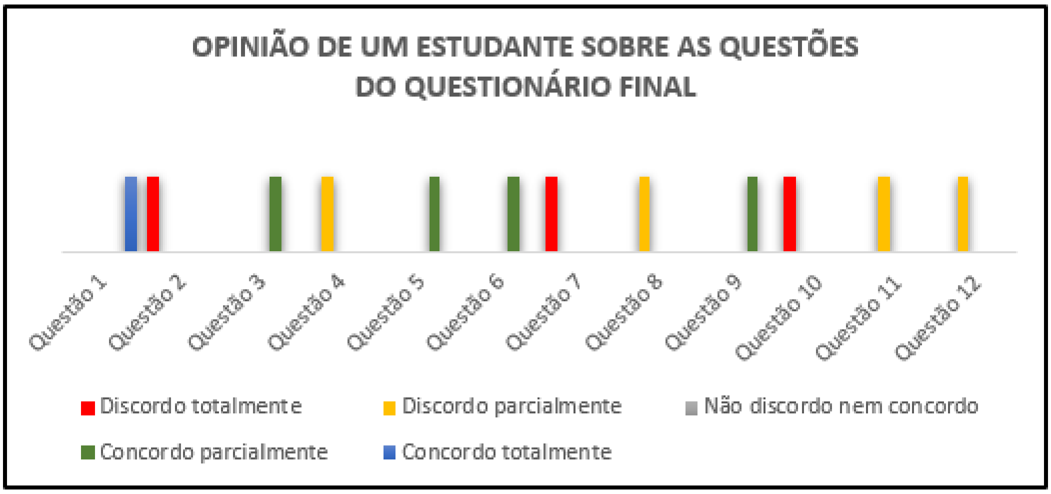


Figura 9.1.10 – Grau de concordância de um estudante sobre as questões do questionário final

De facto, este aluno discorda com as indicações do professor serem suficientes para a realização das tarefas exploratórias e, por isso, não o ajudaram nas tarefas seguintes (Q_{4F}). No entanto, concorda totalmente que as tarefas exploratórias se revelam adequadas ao ensino de limite e continuidade (Q_{1F}), revelando contradição relativamente a sua discordância quanto ao encadeamento das tarefas. Ademais, na questão Q_{6A}: "No que respeita ao trabalho exploratório, haveria alterações que gostaria de sugerir?" a sua resposta "uso de monitoria em sala de aula, teoria antes da prática (prática só vem antes da teoria no dicionário) e práticas com exercícios algébricos e variação das duplas", parece revelar que as alterações nos seus hábitos vivenciados ao longo do seu percurso escolar, causadas pelo uso de abordagem de ensino exploratório dos conceitos matemático, tenham motivado o seu desagrado com a metodologia utilizada (Q_{11F} e Q_{12F}). Este estudante também discorda que as explorações no GeoGebra tenham contribuído para sua compreensão dos tópicos trabalhados (Q_{7F} e Q_{8F}), mas aponta como aspeto positivo do uso do GeoGebra, em resposta à Q_{2A}, "a translação do gráfico das funções" que é um conteúdo trabalhado ao longo da experiência de ensino, o que revela contradição à sua discordância.

Desta forma, a análise aponta para a satisfação dos estudantes em relação à experiência de ensino utilizada para a promoção dos conceitos de limite e continuidade. Há ainda evidências de que a metodologia utilizada tenha favorecido a alteração da atitude dos estudantes em relação a pré-conceitos sobre a disciplina de Pré-Cálculo. Isso mesmo é observado nos comentários de Miriam e Cláudio, na entrevista final, ao responderem ao questionamento do professor-investigador sobre o que acharam dos conteúdos de limite e continuidade na disciplina de Pré-Cálculo terem sido conduzidos por uma prática exploratória de ensino, com a resolução de tarefas exploratórias com recurso ao GeoGebra (figura 9.1.11). Esses estudantes indicam que a sua expectativa inicial era cursar uma disciplina de dificílima compreensão e aprendizagem de seus conteúdos, considerada no IFRJ/Nilópolis como "o terror da faculdade". Todavia, esse pré-conceito foi alterado positivamente com o seu envolvimento nas aulas de resolução de tarefas exploratórias com recurso do GeoGebra.

Foi excelente! Porque quando a gente entra na faculdade e pergunta sobre como é o Pré-Cálculo, as pessoas já falam que é uma disciplina muito difícil, que a gente não vai entender nada, vai ficar em recuperação. Então eu entrei aqui achando realmente que não ia entender nada, nada, nada. Mas foi bem tranquilo, na minha opinião. Não teve aquele peso! Foi bem tranquilo as atividades. Adorei! (comentário de Miriam na E_F)
Quando eu entrei na faculdade, eu já cheguei com medo do Pré-Cálculo, devido os alunos antigos passarem a informação de que o terror da faculdade é o Pré-Cálculo. Eles diziam tenha cuidado, estuda! Então a gente já entra meio que assustado. E quando você começa a ver, não é assim tão difícil. Claro que se a pessoa não estudar não terá um aproveitamento bom. Mas, se você se dedicar um pouquinho mais, vai ver que não é dificuldade [refere-se ao terror]. É desse jeito que estou achando. Não sei se eu serei aprovado, mais [risos]. Eu estou me dedicando bastante. (comentário de Cláudio na E_F)

Figura 9.1.11 – Comentários dos estudantes Miriam e Cláudio que se relaciona aos seus respetivos graus de concordâncias apresentados na Q_{4F}

Por fim, destaca-se ainda que o contacto dos estudantes, futuros professores de Matemática, com recursos inovadores de apoio ao ensino e aprendizagem, revelam ter servido de incentivo às suas práticas docentes futuras. De facto, verifica-se que todos os estudantes reconhecem o potencial das tarefas exploratórias e do uso do GeoGebra para criar ambientes de ensino e aprendizagem promotores de aprendizagens efetivas. Ademais, mesmo reconhecendo a existência de dificuldades na preparação de uma experiência de ensino que considere tais recursos, os estudantes indicam que os adotariam no ensino da Matemática com os seus alunos, ao responderem à questão $Q_{7A}Q_F$: Para promover as aprendizagens dos seus futuros alunos, você acha que pode utilizar o mesmo tipo de tarefas usadas nesta disciplina (exploratória com recurso ao GeoGebra)? Porquê? (figura 9.1.12)

- Dependendo do comportamento da turma sim. É necessária certa seriedade para trabalhar com alunos no computador, e todos realizarem o que lhes foi solicitado.

- Sim, como dito anteriormente, facilita muito a visualização dos processos. Até para o professor, existe um certo roteiro a ser cumprido e isso facilita bastante. Gostei da experiência. Aplicaria e tentaria através dela produzir outras metodologias.

- Sim, acredito que o GeoGebra unido com as tarefas exploratórias incitam o aluno a pensar, a sair da inércia e a perceber que a Matemática não é o terror do Ensino Médio, como fazem alguns professores. E quando o ato de pensar, analisar, observar, torna-se um hábito, a ignorância cede lugar ao desenvolvimento da inteligência. A utilização do GeoGebra auxilia também a reduzir o tempo perdido pelo professor em sala de aula para desenhar os gráficos, além destes serem mais precisos no computador. Outra vantagem do GeoGebra é a possibilidade de formar figuras em 3 dimensões, facilitando a visualização e análise das mesmas.

Figura 9.1.12 – Respostas dos estudantes à questão $Q_{7A}Q_F$

9.2. Síntese e reflexão

Em suma, as respostas dos alunos, apresentadas anteriormente, mostra que é consensual para os estudantes que a resolução de tarefas exploratórias constitui um contexto de ensino inovador, capaz de favorecer o desenvolvimento dos seus raciocínios, a mobilização e a consolidação de conteúdos matemáticos previamente aprendidos, e proporcionar o desenvolvimento de aprendizagem mais efetivas dos conceitos de limite e continuidade. Além disso, consideram suficientes as indicações dadas pelo professor para a realização das tarefas. Todavia, embora indiquem que o tempo foi adequado à realização das tarefas, alguns comentários evidenciam uma crítica sobre este aspeto, sugerindo o aumento do tempo de realização das tarefas ou a diminuição do número das questões da tarefa.

No que respeita às opiniões dos estudantes sobre as explorações realizadas no GeoGebra para a aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade, há evidência de ter favorecido: (i) a descoberta de regras e teorias associadas a esses conceitos; (ii) a experimentação de variáveis a eles associadas, como por exemplo, o comportamento infinito das imagens $f(x)$ quando $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$ e relação entre as vizinhanças e a sua definição formal, e (ii) a visualização do comportamento (des)contínuo das imagens $f(x)$ de uma função, a partir da análise de seu gráfico, e que favoreceu o reconhecimento e a diferença entre continuidade e descontinuidade de uma função.

Também se verifica que o método de ensino exploratório foi reconhecido pela generalidade dos estudantes como eficaz em termos das suas aprendizagens e compreensão do limite e continuidade. As indicações e questionamentos do professor e os momentos de discussão coletiva evidenciam-se fundamentais para os esclarecimentos de dúvidas e consolidação de conhecimentos construídos ao longo da resolução das tarefas.

Por fim, identificou-se discordância apenas em um dos estudantes quanto à realização das tarefas exploratórias, o uso do GeoGebra e o método de ensino exploratório da experiência de ensino, o que pode ter a ver com suas preferências por um ensino tradicional onde a exposição de conteúdos e a resolução de exercícios é prática corrente.

Desta forma, a análise aponta para a satisfação dos estudantes em relação à experiência de ensino utilizada para a promoção da aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade, e revela que a metodologia utilizada tenha favorecido a alteração da atitude dos estudantes em relação a pré-conceitos sobre a disciplina de Pré-Cálculo e contribuído significativamente para a aprendizagem dos estudantes.

Capítulo 10

Conclusões e reflexão final

Neste capítulo apresento as principais conclusões do estudo no que se refere à compreensão dos conceitos de limite e continuidade e ao papel do GeoGebra para essa compreensão. Começo por apresentar uma discussão dos resultados articulando-os com a literatura, e orientado pelas quatro questões do estudo. Em seguida, apresento uma conclusão sobre os dois objetivos da investigação. Finalizo com algumas reflexões finais acerca do estudo realizado contendo implicações que poderão ser úteis a realização de nova investigação nesta temática.

10.1. Síntese do estudo

O presente estudo analisa que compreensão evidenciam os estudantes no processo de aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade de funções, no contexto de uma experiência de ensino de cunho exploratório, integrando o uso do GeoGebra. Para além disso, busco perceber o contributo do GeoGebra para essa compreensão. Tendo em conta esses dois objetivos, procuro responder às seguintes questões de investigação: (i) Quais os significados que os estudantes atribuem aos conceitos de limite e continuidade de funções, ao longo da experiência de ensino? (ii) Como é que os estudantes reconhecem, representam e transformam os conceitos de limite e continuidade em diferentes representações, ao longo da experiência de ensino? (iii) Que conhecimentos sobre os conceitos de limite e continuidade os estudantes mobilizam na resolução de problemas que envolvem estes conceitos, propostos no decorrer da experiência de ensino? (iv) Qual o papel do GeoGebra na compreensão dos conceitos de limite e continuidade, nomeadamente, na construção de significados e no trabalho com diferentes representações destes conceitos para resolver problemas que os envolve? A fundamentação teórica foca-se no conhecimento profissional do professor de Matemática, em particular o conhecimento matemático para ensinar e o seu desenvolvimento na formação inicial de professores, no ensino e a aprendizagem com compreensão do limite e continuidade de funções, e nas potencialidades do uso do GeoGebra na aprendizagem desses conceitos matemáticos.

O estudo segue uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa, e teve por base uma experiência de ensino. Os participantes são estudantes do 1º ano do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Campus Nilópolis, que frequentavam a disciplina de Pré-Cálculo, lecionada pelo investigador. A recolha de dados incluiu a observação participante com gravação em áudio e vídeo das aulas lecionadas, recolha documental do trabalho dos estudantes nas tarefas propostas na experiência de ensino, questionários e entrevistas aos estudantes. A análise dos dados relativos à compreensão que os estudantes evidenciam sobre o limite e continuidade tem por base um referencial de três categorias, nomeadamente, os significados atribuídos aos conceitos, as suas representações e a resolução de problemas que os envolvem, que são consideradas no quadro teórico como componentes dessa compreensão. O papel do GeoGebra nessa compreensão emergiu dos dados e foi analisado com foco nas suas potencialidades e limitações para a aprendizagem desses conceitos matemáticos.

A seguir, apresento as principais conclusões do estudo sobre a compreensão dos conceitos de limite e continuidade e ao papel do GeoGebra para essa compreensão.

10.2. Conclusões

10.2.1. Quais os significados que os estudantes atribuem aos conceitos de limite e continuidade de funções, ao longo da experiência de ensino?

No início da experiência, os estudantes tendem a atribuir significado ao conceito de limite como *resultado de um processo de aproximação ao objeto*, que mostra uma conceção correta do limite como resultado da implicação $x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to L$ (Fernández-Plaza et al., 2013; Mira-Lopes, 2016), ou como *a imagem do ponto através da função*, e que traduz uma conceção limitada do limite no ponto, assente na igualdade $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, que é válida apenas para as funções contínuas em $x = x_0$ (Messias & Brandember, 2015; Gutiérrez-Fallas & Henriques, 2017). Estes significados descrevem conceções informais ou espontâneas do conceito limite (Cornu, 1991), que ocorrem antes da aprendizagem formal desse conceito, e são resultado de conhecimento dos estudantes relativamente à noção intuitiva de aproximações simultâneas $x \to x_0$ e $f(x) \to L$, tal como também atesta Fernández-Plaza et al. (2013) e Pons et al. (2011).

O significado do limite como *resultado de um processo de aproximação ao objeto*, é usado pelos estudantes com maior frequência na resolução das tarefas para analisar e justificar a (in)existência do limite no ponto, e favoreceu o reconhecimento do limite nas condições apresentadas nas tarefas, nomeadamente, nos registos de gráficos de funções e em notações e expressões algébricas associadas ao limite. Relativamente ao significado do limite como *a imagem do ponto através da função*, concluo que este significado se constituiu, no início do estudo, em uma dificuldade cognitiva à compreensão do limite, caracterizada por conflito cognitivo à conceção correta do limite ser alcançado pela função, tal como refere Tall e Vinner (1981). De facto, a generalidade dos estudantes ao analisar o registo geométrico do $\lim_{x \to x_0} f(x)$ em que $f(x_0)$ não está definida ($\nexists\, f(x_0)$), para decidir se o limite é ou não alcançado pela função, concluem que o limite (L) só pode ser alcançado quando coincidir com a $f(x_0)$, revelando dificuldades na compreensão do conceito de limite, tal qual apresentada também nos estudos de Cornu (1991), Juter (2006) e Celestino (2008), pois atribuem significado ao limite como *resultado de um processo de aproximação inalcançável da* $f(x)$*, quando* $L \neq f(x_0)$.

Aponto ainda que embora a totalidade dos estudantes, no final da intervenção didática, revele reconhecer que o limite é alcançado pela função, a maioria dos estudantes justifica-o atribuindo ao limite um significado de um *valor que revela sua existência* e não como *resultado do processo de aproximação convergente ao objeto*, o qual foi observado apenas numa minoria dos estudantes. Para a maioria dos estudantes, uma vez que o limite existe, ele é alcançado pela função, evidenciando que a sua conceção sobre o limite ser alcançado pela função pode estar assente na memorização de conclusão apresentada pelo professor sobre esse aspeto do limite, podendo algumas dúvidas sobre ele ainda permanecer no *conceito-imagem* dos estudantes, conforme aponta Cornu (1991).

Na figura 10.1.1 apresento uma caracterização das conceções dos estudantes sobre o conceito de limite quando têm que decidir se o limite é alcançado pela função:

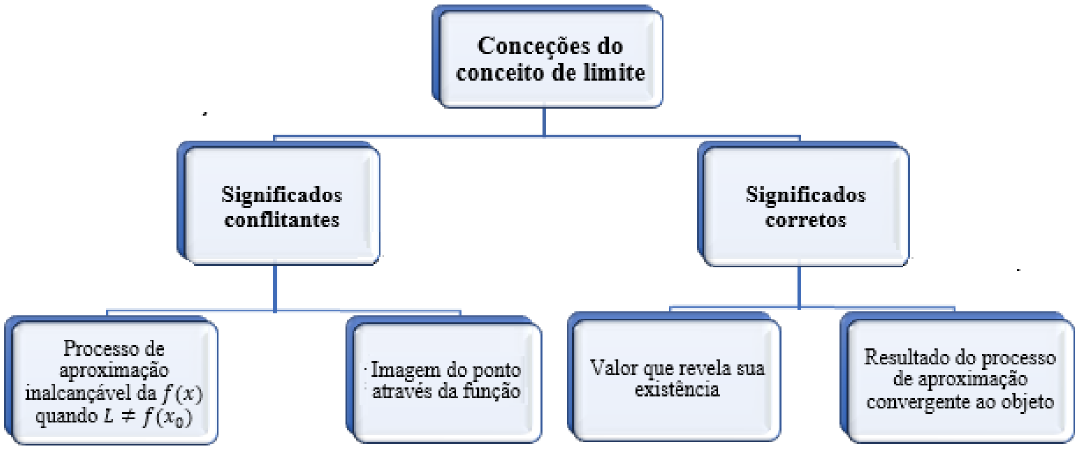


Figura 10.2.1 – Caracterização da conceção dos estudantes sobre o conceito de limite quando têm que decidir se o limite é alcançado pela função

As conceções dos estudantes sobre o conceito de limite foram atualizadas por conceções formais no decorrer da intervenção didática, pois passaram a atribuir significado ao limite como *resultado da igualdade dos limites laterais* e limite como *resultado de correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança*. O primeiro significado descreve uma conceção correta do limite no ponto, e reflete conhecimento das condições que garantem a existência e a unicidade do conceito de limite, sendo estas duas propriedades fundamentais na compreensão deste conceito, tal como aponta Gutiérrez-Fallas & Henriques (2017). Essa conceção se mostrou importante para a conclusão correta sobre a (in)existência do limite no ponto, ao analisar o valor resultante do cálculo algébrico do limite e o seu registo geométrico apoiado no plano cartesiano.

Já o significado correto do limite como *resultado de correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança* é fundamentalmente utilizado pela generalidade dos estudantes para interpretar expressões algébricas que definem formalmente o limite no ponto e o limite infinito. Esses estudantes também usam este significado para justificar a existência do conceito de limite quando representados geometricamente, com registos assentes na expressão algébrica de suas respetivas definições formais, e para apresentar uma definição formal para o limite no infinito. Desta forma, os estudantes revelam uma conceção adequada sobre a definição formal do conceito de limite, tal como atestam Domingos (2003) e Swinyard e Larsen (2012), a qual passou a fazer parte dos seus *conceito-definição* (Tall & Vinner, 1981).

Também se verificou que os estudantes apresentam significados corretos do limite infinito associado à *existência de assíntota vertical ao gráfico da função* e do limite no infinito associado à *existência de assíntota horizontal ao gráfico da função*, para analisar o comportamento assintótico da função (vertical e horizontal). Estes significados corretos do conceito de limite possibilitaram, à generalidade dos estudantes, reconhecer a assíntota vertical ao gráfico de uma função como implicação geométrica do resultado $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{k}{0}$, no cálculo algébrico de limite de uma função racional, e reconhecer o limite no infinito $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ como condições de existência do comportamento assintótico horizontal de uma função e representá-lo algebricamente. Desta forma, apresentam uma correta conceção do limite infinito e limite no infinito, necessária à compreensão do conceito de limite, tal como aponta Maurice (2000) e Nair (2010).

Por fim, os estudantes revelam significados corretos da taxa de variação instantânea de uma função $\left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$ *associada ao declive da reta tangente ao gráfico da função* (Orts et al., 2016). Este significado foi mobilizado por todos os estudantes ao resolver um problema de otimização e possibilitou-lhes reconhecer o valor do declive da reta tangente ao gráfico de uma função no seu ponto máximo e expressá-lo algebricamente por $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$ ou expressão equivalente. Sendo assim, evidenciam possuírem conceção correta da reta tangente ao gráfico de uma função, essencial à compreensão do limite (Biza & Zachariades, 2010; Orts et al., 2016).

À face do exposto, apresento uma caracterização da conceção dos estudantes sobre o limite, resultado dos significados por eles atribuídos a este conceito para decidir e justificar a sua existência (figura 10.1.2). Esses significados revelam a conceção dos estudantes sobre três aspetos associados ao conceito de limite, nomeadamente, a existência do limite, o comportamento assintótico da função e a taxa de variação instantânea.

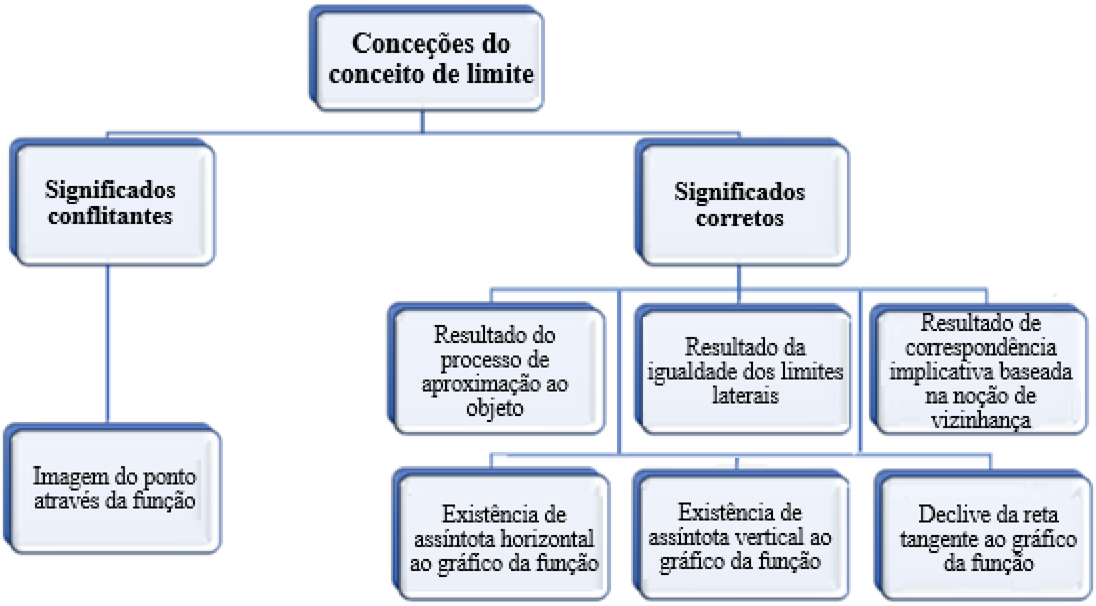


Figura 10.2.2 – Caracterização da conceção dos estudantes sobre o conceito de limite associado a existência do limite, ao comportamento assintótico da função e a taxa de variação instantânea

Relativamente ao conceito de continuidade, observa-se, no início da aprendizagem deste conceito matemático, que os estudantes atribuem à função contínua o significado da *função cujo gráfico não possui interrupções*, que traduz a noção clássica de função contínua como aquela que seu gráfico pode ser traçado sem que se tire o lápis do papel tal como afirma Tall & Vinner (1981) e Sealy et al. (2014), ou da *função que a cada ponto do seu domínio associa uma imagem*, usada para traduzir uma conceção limitada do conceito de continuidade assente na existência de imagem $f(x)$ para cada ponto de abscissa x do seu domínio (Juter, 2006). Estes significados descrevem conceções intuitivas desse conceito e são resultado das experiências anteriores dos estudantes na interpretação de gráficos de funções, tal como é confirmado em outros estudos (Juter, 2006; Tall & Vinner, 1981). É possível inferir que esta conceção limitada do conceito de continuidade conduziu os estudantes ao erro de considerar como função contínua, os casos em que o gráfico da função apresentava 'saltos' em $x = x_0$ ou quando descrevia comportamentos laterais infinitos em $x = x_0$.

Esta conceção intuitiva dos estudantes sobre a continuidade de uma função é atualizada no decorrer da intervenção didática por conceções formais, pois passaram a atribuir significado ao conceito de continuidade associado à *existência do limite no ponto*, à *igualdade* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ou às *funções contínuas preconcebidas*. O primeiro significado descreve uma conceção limitada da continuidade de uma função que considera apenas à existência do limite da função num determinado ponto. Esta conceção de continuidade também é verificada nos estudos de Cornu (1991), Juter (2006) e Messias e Brandemberg (2015). O segundo, traduz uma conceção correta do conceito de continuidade assente na verificação dos três critérios de sua existência, nomeadamente: (i) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$; (ii) $\exists f(x_0)$; e (iii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (Sealy et al., 2014).

É possível inferir que a conceção do conceito de continuidade associada à *existência do limite no ponto* não se tornou um obstáculo à aprendizagem dos estudantes sobre esse conceito matemático, contrariamente ao que foi observado em Cornu (1991), Juter (2006) e Nair (2010). De facto, os estudantes que na tarefa T_{13} atribuíram à função contínua conceitos imagem associados à *existência do limite no ponto*, revelam terem superado essa conceção limitada de continuidade, apresentando conceitos imagem associados ao significado de continuidade como *resultado da igualdade* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ para definirem o conceito de continuidade e determinarem a continuidade de uma função nas tarefas posteriores (T_{15} e T_{16}). Este significado correto da continuidade conduziu-os, não só à conclusão e justificação da (des)continuidade de uma função nas condições apresentadas nas tarefas, mas também permitiu tornar mais clara a conexão entre a definição informal e formal de continuidade, pois apresentaram explicações corretas e elucidativas do $\lim_{x \to x_0} f(x)$ correlacionado à $f(x_0)$ para traduzir a definição formal da continuidade na igualdade $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (tarefa T_{15}). Ademais, concluo que este significado correto de continuidade passou a fazer parte dos seus *conceito-definição* (Tall & Vinner, 1981) pois o utilizam para definir este conceito e provar a sua existência na resolução de problemas que o envolve.

Também se verifica que alguns estudantes atribuíram significado à continuidade associado às *funções contínuas preconcebidas*, o qual favoreceu o reconhecimento da continuidade de funções definidas algebricamente, como por exemplo, as polinomiais. Por fim, o significado da continuidade como *resultado da definição formal de limite no ponto*, que descreve uma conceção formal do conceito de continuidade com base nas simbologias de sua definição formal (Tall & Vinner, 1981), está associado ao *conceito-imagem* da generalidade dos estudantes, pois esses estudantes mobilizam-no para definir formalmente a continuidade de uma função a fim de provar a sua existência.

Desta forma, a análise dos dados também permite descrever uma caracterização da conceção dos estudantes sobre o conceito de continuidade, resultado de significados por eles atribuídos à função contínua para decidir e justificar a (des)continuidade de funções representadas graficamente e interpretar a expressão algébrica que visava definir formalmente a continuidade de uma função (figura 10.1.3).

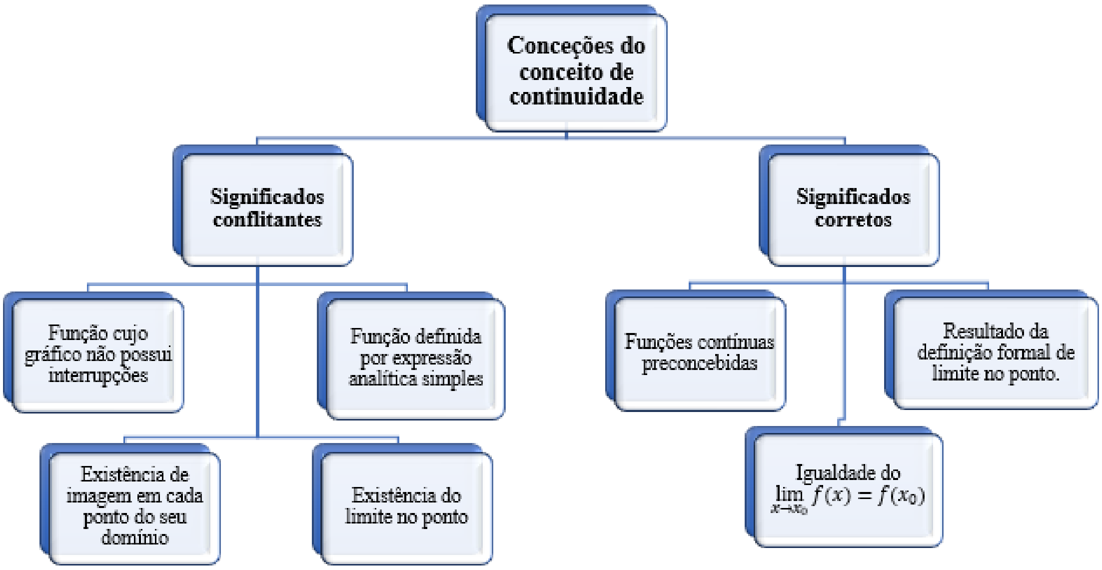


Figura 10.2.3 – Caracterização da conceção dos estudantes sobre o conceito de continuidade

10.2.2. Como é que os estudantes reconhecem, representam e transformam os conceitos de limite e continuidade em diferentes representações, ao longo da experiência de ensino?

Os resultados mostram que a generalidade dos estudantes foi capaz de reconhecer os conceitos de limite e continuidade em registos associados às diferentes representações destes conceitos e realizar conexões adequadas e corretas entre eles, realizando corretamente transformações (*tratamentos* e *conversões*) entre elas, os quais são indispensáveis à compreensão desses conceitos, tal como apontam Domingos (2003), Juter (2006) e Karatas et al. (2011).

Os estudantes apresentaram facilidade, ao longo de toda a experiência de ensino, no reconhecimento do conceito de limite representado geometricamente com registos assentes nas noções intuitivas de aproximações ou na expressão algébrica da sua definição formal. De facto, a generalidade dos estudantes recorre predominantemente à representação verbal do limite para explicar corretamente o registo que expressa geometricamente o limite no ponto e o limite no infinito, e complementam as suas explicações com outros registos que traduzem igualmente o limite, como por exemplo, a representação tabular do limite, usada por eles para descrever as convergências numéricas das aproximações sucessivas $x \to x_0$ e $f(x) \to L$, e expressões algébricas associadas à noção de limite, tais como $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ e a expressão da definição formal do limite. Ademais, foram capazes de reconhecer o limite no infinito de uma função racional f $\left(\lim_{x \to \infty} f(x) = L\right)$ representado geometricamente e de relacioná-lo à existência de uma assíntota horizontal ao gráfico da função f. Desta forma, os estudantes mostram adequada habilidade no emprego e conexão de diferentes representações do limite (verbal, tabular e algébrica) para explicar o limite representado geometricamente, o que evidencia compreensão do mesmo, segundo Juter (2006) e Karatas et al. (2011).

Os resultados mostram também, que após terem explorado o conceito de limite assentes nas noções de vizinhanças, a generalidade dos estudantes apresenta facilidade no reconhecimento do conceito de limite representado algebricamente por sua definição formal. Sobre esta conclusão aponto que esses estudantes apresentaram explicações adequadas e elucidativas das desigualdades $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - L| < \varepsilon$, dos quantificadores e do seu papel na definição formal do limite no ponto, para indicar a implicação $x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to L$ ou $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$) e concluir corretamente sobre a existência do limite. Para além disso, apresentam significações corretas das desigualdades $|x - x_0| < \delta$ e $f(x) > M$, dos quantificadores e do seu papel na definição formal do limite infinito, indicando o comportamento infinito das imagens $f(x)$ quando $x \to x_0$ para concluir sobre a existência do referido limite. Desta forma, esses estudantes revelam adequada conceção das simbologias da definição formal do conceito de limite, que é necessária à compreensão deste conceito, tal como defende Domingos (2003) e Swinyard e Larsen (2012).

Os estudantes também revelaram reconhecer o conceito de limite a partir do resultado do seu cálculo algébrico. Eles foram capazes de calcular corretamente o $\lim_{x \to x_0} f(x)$ apresentando corretos *tratamentos* dos registos algébricos e correlacionar a representação geométrica do limite ao resultado algébrico do seu cálculo. Quando o $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{0}{0}$ concluíram corretamente que a simbologia $\frac{0}{0}$ correspondia a um tipo de indeterminação de limite no ponto. Nos casos em que o $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \frac{k}{0}$ e/ou $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \frac{k}{0}$ indicaram corretamente que $\frac{k}{0}$ determina um limite infinito, associando-o à existência de assíntota vertical ao gráfico da função f em x_0. Esses resultados foram apresentados pela generalidade dos estudantes na resolução das tarefas que envolviam esses aspetos do cálculo algébrico do conceito de limite, e mostram conceções corretas da forma a indeterminada $\frac{0}{0}$ e da divisão por zero $\left(\frac{k}{0}\right)$ e a sua importância no cálculo de limites, os quais, segundo Juter (2006), Maurice (2000) e Nair (2010), são essenciais à compreensão do conceito de limite.

Relativamente à capacidade de representar o conceito de limite nas suas diferentes representações (algébrica e geométrica), a maioria dos estudantes foi capaz de representar geometricamente o conceito de limite, a partir da *conversão* da representação algébrica que expressa o conceito de limite, nomeadamente, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, $\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \frac{k}{0}$ e $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ e realizar *tratamentos* adequados na representação geométrica correspondente. Esses estudantes apresentaram esboços corretos de gráficos de funções, contendo, de forma elucidativa, as convergências das imagens $f(x)$ ($f(x) \to L$ ou $f(x) \to \pm\infty$) à medida que $x \to x_0$ ou $x \to \pm\infty$. Ademais, apresentam indicações dos casos de existência do limite no ponto ou de registos geométricos de retas vertical ou horizontal para indicar respetivamente a implicação geométrica do limite infinito e limite no infinito.

No entanto, assim como nos estudos de Domingos (2003) e Swinyard e Larsen (2012), revelaram-se neste estudo algumas dificuldades dos estudantes no que respeita à capacidade de representar algebricamente o conceito de limite. De facto, no início da aprendizagem da definição formal de limite, observa-se que a generalidade dos estudantes apresentaram dificuldades em conceber o limite como resultado da implicação $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$, impedindo-os de representar o limite no ponto por sua definição formal. Apesar disso, há evidências de que a maioria desses estudantes superou essas dificuldades iniciais, pois foram capazes de representar o $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ por sua definição formal ao expressar a continuidade de uma função f num ponto x_0. Ademais, foram capazes de expressar o $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ por uma expressão algébrica que descreve a correspondência implicativa $x > A \Rightarrow f(x) \in V_{\varepsilon}(0)$, contendo registos corretos das desigualdades algébricas e quantificadores, a qual indicando um correto registo da definição formal do referido limite no infinito.

Por fim, sobre a capacidade de *transformação* das diferentes representações do limite, observa-se que generalidade dos estudantes foi capaz de *converter* a representação algébrica da definição formal do limite numa representação geométrica, contendo indicações das variáveis relacionadas aos registos convertidos. De facto, esses estudantes apresentaram no plano cartesiano o esboço do gráfico de uma função, contendo registos geométricos corretos das desigualdades $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ formados por intervalos abertos centrados em $x = x_0$ e $f(x) = L$, e da correspondência implicativa $x \in V_{\delta}(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_{\varepsilon}(L)$ por meio de esquemas elucidativos de pontos $\big(x, f(x)\big)$ ou por setas, evidenciando correta *conversão* da representação algébrica do limite em sua representação geométrica, tal como atesta Domingos (2003) e Juter (2006).

Aponto, também, no final da aprendizagem da taxa de variação instantânea de uma função, que todos os estudantes foram capazes de converter o declive da reta tangente ao gráfico de uma função f no seu ponto máximo $P(x_0, f(x_0))$, representado geometricamente, para uma expressão algébrica associada à taxa de variação instantânea, nomeadamente, por $m_T = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$, a fim determinar a equação que permite obter os valores das coordenadas de P. Esses estudantes revelaram ser capazes de realizar conexões entre a noção de reta tangente ao gráfico de uma função e o conceito de limite associado a taxa de variação instantânea, as quais são referidas por Biza e Zachariades (2010) e Orts et al. (2016), como fundamentais à compreensão do conceito de limite.

Apesar disso, ao nível dos procedimentos algébricos, observa-se que a maioria dos estudantes apresentaram dificuldades no trabalho com variáveis algébricas representadas por expressões literais. De facto, as dificuldades de *tratamentos* dos registos algébricos no cálculo de limite no infinito, impediram a maioria dos estudantes de expressar algebricamente uma conjetura sobre os resultados do cálculo algébrico do limite no infinito de funções racionais $\left[\lim\limits_{x \to \infty} \frac{p(x)}{q(x)}\right]$. Ademais, as dificuldades no *tratamento* dos registos algébricos das coordenadas de pontos no plano cartesiano expressos por expressões literais, impediram a generalidade dos estudantes de reconhecer, no início da aprendizagem da taxa de variação instantânea de uma função, que o declive da reta tangente ao gráfico de uma função no ponto x_0 é expresso por esta taxa de variação instantânea. Essas dificuldades apontam para limitações da maioria dos estudantes nos processos e procedimentos do âmbito da Álgebra, quando consideradas expressões algébricas literais, tais como observados nos estudos de Juter (2006), Maurice (2000) e Nair (2010).

Quanto ao trabalho com as diferentes representações do conceito de continuidade, observa-se que os estudantes, em geral, foram capazes de reconhecer a (des)continuidade de uma função representada geometrica e algebricamente, com registos assentes na expressão algébrica da sua definição formal. Os estudantes recorreram predominantemente à representação *verbal* para explicar adequadamente os registos (geométrico e algébrico) que traduzem a (des)continuidade, e complementam-na com esquemas adequados e elucidativos e/ou com outras expressões algébricas assentes nos critérios de existência da continuidade, tal como, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Os resultados mostram facilidade dos estudantes na identificação, emprego e conexões de diferentes registos (geométrico e algébrico) associados ao conceito de continuidade, o que evidencia compreensão do mesmo segundo atesta Domingos (2003) e Karatas et al. (2011).

Sobre a capacidade de representar o conceito de continuidade nas suas diferentes representações (algébrica e geométrica), os resultados evidenciam adequada habilidade dos estudantes em representar geometricamente a (des)continuidade de uma função, sendo esta habilidade essencial à compreensão desse conceito tal como afirma Domingo (2003) e Karatas et al. (2011). Os estudantes apresentaram representações geométricas identificáveis (Duval, 1999) do conceito de continuidade ao representar gráficos de funções contínuas preconcebidas, fruto de suas conceções intuitivas sobre a continuidade de uma função caracterizada. Também a generalidade dos estudantes apresentou correta representação geométrica da continuidade de uma função, a partir da *conversão* da representação algébrica que traduzia a sua definição formal, realizando *tratamentos* adequados nesta representação geométrica, alguns dos quais apoiados nas simbologias da referida definição formal.

Também se observa que a maioria dos estudantes foi capaz de deduzir, autonomamente, os critérios de continuidade de uma função no ponto, e representá-los algebricamente pela igualdade $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, salientando a necessidade da existência do $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e $f(x_0)$ ser garantida. Há evidências de que os estudantes que não conseguiram deduzir esses critérios de continuidade na resolução da tarefa, tenham conseguido compreendê-lo na discussão coletiva e sistematização das aprendizagens desta tarefa. Após isto, foram capazes de usar a expressão $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ para representar algebricamente a (des)continuidade de funções representada geometricamente (T_{14} e T_{16}) e representada pela expressão algébrica de sua definição formal (T_{15}), evidenciando assim, terem assimilado os critérios de existência do conceito de continuidade, indispensáveis à compreensão deste conceito (Karatas et al., 2011; Messias & Brandemberg, 2015).

Ressalto ainda, que a generalidade dos estudantes revelou facilidade na tradução geométrica e algébrica da continuidade de uma função, revelando igualmente adequada capacidade de transformações (*tratamentos* e *conversões*) dessas representações. De facto, a generalidade dos estudantes foi capaz de expressar a definição formal do conceito de continuidade por meio da notação algébrica $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e por uma representação geométrica identificável da continuidade de função, apresentando correto *tratamento* e *conversão* das simbologias desta definição. Ademais, desenvolveram um correto raciocínio sobre as características essenciais das dimensões da caixa, a partir de experimentações numéricas do cálculo do seu volume e generalizações, sendo capazes de traduzir algebricamente a função contínua que modela o volume de uma caixa de formato paralelepípedo. À vista disso, os estudantes revelam adequada capacidade de realizarem transformações (*tratamentos* e *conversões*) sobre as representações algébricas e geométricas da continuidade, o que evidencia compreensão do mesmo (Duval, 2006).

10.2.3. Que conhecimentos sobre os conceitos de limite e continuidade os estudantes mobilizam na resolução de problemas que envolvem estes conceitos, propostos no decorrer da experiência de ensino?

A análise dos resultados mostram que a generalidade dos estudantes foi capaz de mobilizar os conhecimentos adquiridos sobre o conceito de limite para resolver problemas (i) que consistem na análise de proposições matemáticas que envolvem a aplicação da condição de existência e do cálculo do $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e conhecimentos sobre a sua definição formal, validando-as ou justificando as incorreções nelas presentes; e (ii) que envolvem a aplicação da taxa de variação instantânea de uma função no ponto x_0.

Sobre o primeiro aspeto, os resultados evidenciam que os estudantes utilizaram a condição de existência do limite no ponto (igualdade dos limites laterais) e realizaram corretamente procedimentos do cálculo algébrico de limite para analisar o comportamento das imagens $f(x)$ de uma função f na vizinhança de $x_0 = 3$, e identificar, corrigir e justificar o erro de uma afirmação sobre a existência do $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Eles também foram capazes de identificar expressões algébricas que definem corretamente o conceito de limite, ou justificam incorreções nelas presentes, fazendo uso correto dos quantificadores e da relação implicativa entre as desigualdades algébricas ($|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - L| < \varepsilon$ ou $f(x) < A$) da definição formal do limite. Desta forma, evidenciam que são capazes de aplicar corretamente os conhecimento das condições de existência do conceito de limite e das simbologias de sua definição formal, para resolver problemas que os envolvem, os quais mostram uma compreensão adequada deste conceito, tal como defendem Domingos (2003), Mira-López (2016) e Swinyard e Larsen (2012).

Relativamente ao segundo aspeto, observou-se que a generalidade dos estudantes apresentou dificuldades na aplicação da taxa de variação instantânea $\left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$ para resolver um problema que a envolve, no início de sua aprendizagem. As incorreções no registo algébrico de $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, causado por incompreensão sobre a reta tangente que alguns estudantes assumem como a reta que corta o gráfico em apenas um ponto e/ou fragilidade nos procedimentos algébrico do cálculo do limite, como a manipulação das expressões algébricas, factorização e simplificação de frações algébricas, contribuíram para que os estudantes não conseguissem aplicar corretamente a taxa de variação instantânea para determinar o declive da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $x = 2$. Estas dificuldades foram também identificadas noutros estudos de Biza e Zachariades (2010), Juter (2006) e Orts et al. (2016). Apesar disso, observa-se que essas dificuldades iniciais parecem ter sido superadas pela generalidade dos estudantes, pois foram capazes de aplicar corretamente a taxa de variação instantânea para resolver um problema de otimização que envolvia a resolução de equação $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$ para determinar o volume máximo e as medidas de uma caixa de formato paralelepípedo.

No que respeita à resolução de problemas que envolve a aplicação de conhecimentos sobre o conceito de continuidade, os resultados mostram que a generalidade dos estudantes foi capaz de (i) analisar proposições algébricas que envolve este conceito, provando-as ou justificando as incorreções nelas presentes e (ii) resolver problemas que apelam à modelação matemática e requer aplicação dos critérios de continuidade ou do TVI.

No que respeita ao primeiro aspeto, o uso da definição formal de continuidade para provar a continuidade de uma função num ponto revelou-se para os estudantes num obstáculo lógicos, tal como classificado por Sierpinska (1985), pois apenas alguns o fizeram corretamente. A incompreensão do procedimento algébrico para encontrar δ em função de ε que torna as desigualdades $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ verdadeiras, dificuldades também identificadas nos estudos de Cottrill et al. (1996), Domingos (2003) e Juter (2006), podem ter contribuído para que metade dos estudantes recorressem a argumentos baseados em aproximações, ao invés de baseá-los na noção de vizinhança para justificar a existência de $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$, e não conseguissem aplicar a definição formal para o validar, na tarefa T_{15}.

Para além disso, saliento que a maioria dos estudantes foi capaz de analisar proposições algébricas que envolvem o conceito de continuidade, provando-as ou justificando as incorreções nelas presentes. Esses estudantes construíram registos geométricos que traduzem as simbologias algébricas contidas nas proposições, e analisaram se os critérios de continuidade ou pressupostos do TVI eram neles satisfeitos. Com base nesta análise, realizaram a prova ou incorreções nas proposições, apresentando explicações verbais e/ou complementando-as com registos de gráficos de funções (des)contínuas como contraexemplos. Desta forma, foram capazes de mobilizar conhecimentos informais e formais sobre os critérios da continuidade e as simbologias do TVI, fazendo uso correto de contraexemplos, o que evidencia adequada capacidade de pensar abstratamente sobre o conceito de continuidade e que é necessário à sua compreensão tal como defende Ko e Knuth (2009), Sealey et al. (2014) e Strand (2016).

Relativamente ao segundo aspeto, os estudantes revelaram facilidade na aplicação dos critérios de continuidade ou do TVI para resolverem problemas que apelam à modelação matemática, quando os pressupostos destes são explicitamente identificáveis no enunciado do problema. Neste sentido, a generalidade dos estudantes recorreu à existência de $\lim_{x \to x_0} f(x)$ para determinar algebricamente o valor de k que garante a continuidade de uma função, na tarefa T_{13}. Ademais, reconheceram no enunciado do problema os pressupostos do TVI, nomeadamente, $f(a) < d < f(b)$, $x_0 \epsilon [a, b]$ e f contínua em $[a, b]$, para provar a existência de $x_0 \epsilon [a, b]$ tal que $f(x_0) = 0$, na tarefa T_{17}.

No entanto, quando desafiados a traduzirem do problema os pressupostos do TVI, a maioria dos estudantes revelou pouco domínio da modelação e dificuldades com a Álgebra. As principais dificuldades foram: (i) não conseguir traduzir numa expressão algébrica a função que modela o problema; (ii) não ser capaz de correlacionar a solução de uma equação com a raiz da função e (iii) não relacionar os intervalos de pontos do domínio da função $[a, b]$ aos seus correspondentes contradomínios $[f(a), f(b)]$. Estas dificuldades, semelhantes às encontradas nos estudos de Sealey et al., (2014) e Strand (2016), configuram-se em *obstáculos epistemológicos* associados ao conceito de função, tal como descrito por Sierpinska (1985), e foram as causas de incompreensões sobre os pressupostos do TVI e contribuíram para que alguns estudantes não conseguissem aplicar os conhecimentos sobre o conceito de continuidade para resolver problemas que envolve a aplicação do TVI, nas $(Q_1$ e $Q_2)T_{17}$.

10.2.4. Qual o papel do GeoGebra na compreensão dos conceitos de limite e continuidade, nomeadamente, na construção de significados e no trabalho com diferentes representações destes conceitos para resolver problemas que os envolvem?

No que respeita ao papel do GeoGebra na construção dos significados do conceito de limite, os resultados mostram que as explorações de aproximações simultâneas $x \to x_0^-$, $x \to x_0^+$ e $f(x) \to L$ e a visualização do comportamento convergente das imagens $f(x) \to L$, em gráficos de funções reais apresentadas em *applets* do GeoGebra, possibilitaram a significação das noções intuitivas do limite no ponto assentes na aproximação simultânea $x \to x_0$ e $f(x) \to L$. Esse contributo do GeoGebra facilitou o desenvolvimento de conceitos imagem corretos do conceito de limite associado ao *resultado de um processo de aproximação ao objeto e da igualdade dos limites laterais*, os quais possibilitaram aos estudantes que manifestaram terem-nos adquirido, analisar e justificar corretamente a (in)existência do limite nas condições exploradas.

Para além disso, as explorações em *applets* do GeoGebra que continham a representação geométrica do conceito de limite, com registos assentes na expressão algébrica da sua definição formal, nomeadamente simulações das vizinhanças $V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$ representadas por intervalos $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ e $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$ e geradas a partir de modificações dos valores de seus raios (δ e ε), e as simulações de pontos $(x, f(x))$ com $x \in V_\delta(x_0)$ ou $x > A$ e $f(x) \in V_\varepsilon(L)$, favoreceram a conceção das simbologias da definição formal do conceito de limite, nomeadamente, a relação entre os quantificadores ($\forall\, \varepsilon > 0$ e $\exists\, \delta > 0$ ou $\forall\, \varepsilon > 0$ e $\exists\, A > 0$) e a correspondência entre as desigualdades ($|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ ou $x > A$, $|f(x) - L| < \varepsilon$). Este contributo do GeoGebra possibilitou o desenvolvimento de conceitos imagem corretos de limite como resultado de uma *correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança*, possibilitando a alguns estudantes reconhecerem e justificarem o limite no ponto em termos da implicação $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$ e o limite no infinito com base na implicação $x > A \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

Também ressalto que explorações dinâmicas de pontos $(x, f(x))$ em gráficos de funções em *applets* do GeoGebra, nomeadamente $x \to x_0^+$ e $x \to x_0^-$ e $f(x) \to \infty$ ou $f(x) \to -\infty$ na tarefa T_7 e $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$ com $f(x) \to L$ na tarefa T_9, e a visualização de seus efeitos que indicam o comportamento das imagens $f(x)$ seguindo a direção de uma reta vertical em x_0 (na T_7) ou de uma reta horizontal de equação $y - L = 0$ (na T_9), favoreceram, respetivamente, o desenvolvimento de conceitos imagem corretos do limite infinito associado à *existência de assíntota vertical ao gráfico da função* e do limite no infinito associado à *existência de assíntota horizontal ao gráfico da função*. Esses conceitos imagem do conceito de limite possibilitaram à generalidade dos estudantes reconhecerem a assíntota vertical como implicação geométrica do resultado $\frac{k}{0}$ no cálculo algébrico de limite de uma função racional (Q_5T_7), e reconhecer o limite no infinito como condição de existência de uma assíntota horizontal ao gráfico de uma função (Q_4T_9).

Saliento, ainda, que as simulações em *applets* do GeoGebra que continham animações geométricas da reta secante $r_S = \overrightarrow{PQ}$ ao gráfico de uma função f convergindo à reta tangente ao gráfico de f em P – com indicações de seus respetivos declives m_T e m_S – e a visualização das convergências $r_S \to r_T$ e $Q \to P$ ou da diferença desprezível entre os declives m_T e m_S $(|m_T - m_S| \to 0)$, quando $h \to 0$, revelam ter possibilitado o desenvolvimento de conceitos imagem corretos do limite como *resultado de processo de aproximação convergente ao objeto*, possibilitando à maioria dos estudantes justificarem corretamente que o limite é alcançado pela função (Q_7T_{12}).

Relativamente ao conceito de continuidade, sublinho que as explorações no GeoGebra favoreceram o desenvolvimento e consolidação de conceitos imagem corretos da continuidade como *resultado da igualdade* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. De facto, as explorações dinâmicas que os estudantes realizaram das aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to L$ e de pontos $(x, f(x))$ no gráfico de funções, revelam tê-los ajudado a analisar o comportamento das funções em $x = x_0$ e concluir sobre sua (des)continuidade, apresentando justificações baseadas na igualdade $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Para além disso, muitas justificações/explicações dos estudantes sobre a continuidade com base nestes conceitos imagem foram reforçadas pelos estudantes, tendo estes recorrido às explorações no GeoGebra. Desta forma, revelaram que o uso do GeoGebra favoreceu a consolidação desses conceitos imagem, já que todos estes recorrem à igualdade $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ para justificar as suas conclusões sobre a continuidade, na T_{16} e resolver problemas que envolve este conceito, na T_{17}.

Pelo exposto, é possível inferir que todos esses contributos do GeoGebra foram favorecidos pela multiplicidade de ferramentas dinâmicas do GeoGebra que permite a visualização de diferentes representações (verbal, geométrica, algébrica e tabular) associadas ao limite e continuidade, tal como refere Hohenwarter et al. (2008) e Rocha (2010), e favorece a significação de definições e propriedades associadas a esses conceitos, como salientado por Alves (2010) e Dikovic (2017). Por isso, os classifico como contributos do GeoGebra associados aos *processos de visualização* dos conceitos de limite e continuidade. Em resumo, apresento na tabela 10.2.1 os contributos do GeoGebra relativamente à construção de significados do limite e continuidade que foram identificados neste estudo.

Tabela 10.2.1 – Contributos do GeoGebra na construção de significados do limite e continuidade

	Contributos do GeoGebra na construção de significados do limite e continuidade
Processos de visualização	❑ Favoreceu desenvolvimento de significados corretos do limite como resultado *do processo de aproximação ao objeto, da igualdade dos limites laterais, de uma correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança,* ao analisar sua existência ❑ Favoreceu o desenvolvimento de significados corretos do limite ser como *resultado de processo de aproximação convergente ao objeto* ao decidir se o alcançado pela função ❑ Favoreceu, respetivamente, o desenvolvimento de conceitos imagem corretos do limite infinito associado à *existência de assíntota vertical ao gráfico da função* e do limite no infinito associado à *existência de assíntota horizontal ao gráfico da função* ❑ Favoreceu o desenvolvimento de significados corretos da continuidade como *resultado da igualdade* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Quanto ao papel do GeoGebra no trabalho com as diferentes representações dos conceitos de limite e continuidade, as explorações nas *applets* do GeoGebra que favorece a significação de definições e representações algébricas associadas a esses conceitos, tal como atesta Dikovic (2017), Hohenwarter et al. (2008) e Rocha (2010), *possibilitou a construção de representação algébrica do limite com base nas noções formais de vizinhanças* e a *tradução algébrica do declive da reta tangente ao gráfico de uma função no seu ponto máximo por* $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$.

O primeiro contributo decorre das explorações que os estudantes realizaram em *applets* do GeoGebra, que continham representações geométricas do limite no ponto, e que permitiam simulações dinâmicas de pontos $(x, f(x))$ e das vizinhanças $x \in V_\delta(x_0)$ e $f(x) \in V_\varepsilon(L)$ representadas por intervalos $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ e $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$ e geradas por modificações de seus raios (δ e ε). Essas explorações facilitaram a significação das simbologias $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ pelos estudantes, possibilitando-lhes construir uma representação algébrica do limite assente na implicação $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

Já o segundo contributo pode ser confirmado na tarefa T_{14}, quando os estudantes realizam modificações do ponto $P(x, V(x))$ no gráfico de uma função V apresentado numa *applet* para o posicionar no máximo do gráfico de V, e visualizam o registo geométrico horizontal da reta tangente (r_T) ao gráfico de V em P. Estas explorações facilitaram a significação do registo geométrico de r_T no ponto máximo de V pelos estudantes, permitindo-lhes traduzir algebricamente o declive de r_T por $\lim_{h \to 0} \frac{V(x_0+h)-V(x_0)}{h} = 0$. Ressalto ainda, que embora identificada uma limitação visual do GeoGebra nessas explorações, caracterizada por não apresentar a reta tangente totalmente horizontal, no ponto máximo do gráfico de V, esta limitação não se configurou num obstáculo à taxa de variação instantânea, beneficiando da intervenção do professor, face ao contexto de ensino exploratório (Canavarro, 2011). Sobre isto aponto que o professor promoveu esclarecimentos sobre as razões dessa limitação e conduziu os estudantes a explorações alternativas com a realização de zooms, a fim de obter adequada representação geométrica do ponto de máximo e da reta tangente ao gráfico de V, neste ponto.

Tendo em conta o exposto, esses contributos do GeoGebra podem ser enquadrados na classificação dos contributos do GeoGebra associados aos *processos de visualização*, uma vez que as explorações nas *applets* possibilitaram a significação de simbologias da definição formal e de registos algébricos associados à taxa de variação instantânea de uma função.

Quanto aos recursos do GeoGebra que permitem a conexão entre diferentes representações de limite e continuidade, tal como defende Aydo (2015), Dikovic (2009) e Öçal (2017), os resultados indicam que as simulações da convergência $f(x) \to L$ quando $x \to x_0$ na representação geométrica do $\lim_{x \to x_0} f(x)$ apresentada numa *applet*, conectada ao registo algébrico do cálculo do limite, possibilitou o reconhecimento do resultado algébrico $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{0}{0}$ como uma indeterminação de limite pelos estudantes. De igual modo, as explorações dos estudantes numa *applet* do GeoGebra, de pontos $(x, f(x))$ e a visualização de seus efeitos no gráfico de uma função racional f, nomeadamente, $f(x) \to \infty$ ou $f(x) \to -\infty$ na medida $x \to x_0^+$ e/ou $x \to x_0^-$, correlacionada aos registos algébricos do cálculo dos limites laterais, possibilitaram-lhes o reconhecimento de que o resultado algébrico $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \frac{k}{0}$ e/ou $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \frac{k}{0}$ determina limites infinitos. Também as explorações dos pontos $(x, f(x))$ com $x \to \infty$ e $f(x) \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ na representação geométrica do limite no infinito apresentada *numa applet*, com registos assentes na sua definição formal, e a conexão destes aos registos algébricos de $x > A$ e ($|f(x) - 0| < \varepsilon$), favoreceram a representação da definição formal do limite no infinito pelos estudantes.

Para além disso, e associado ao conceito de continuidade, a conexão dos registos algébricos dos pressupostos do TVI com os seus respetivos registos geométricos numa *applets* do GeoGebra, favoreceu *o reconhecimento da continuidade como o critério para garantir a existência de* $x_0 \in [a, b]$ *tal que* $f(x_0) = d$*, com* $d \in [f(a), f(b)]$. Esta conclusão decorre das explorações que os estudantes realizaram nas representações geométricas da (des)continuidade de uma função na *applets* do GeoGebra, as quais lhes permitiram verificar e justificar algumas definições e proposições na forma algébrica, nomeadamente, $f(a) < d < f(b)$ significando os valores de $f(x) = d$ no contradomínio da função f e $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = d$, denotando pontos x_0 do domínio cuja imagem pela função $f(x) = d$. À vista disso, ainda ressalto que apesar de identificada uma limitação visual do GeoGebra, caracterizada por não apresentar o registo geométrico do ponto $N(x, d)$, interseção entre a reta $y = d$ e o gráfico da função f_k, esta limitação não se configurou num obstáculo à aprendizagem do TVI, beneficiando da intervenção do professor face ao contexto de ensino exploratório. À vista disto, o professor promoveu esclarecimentos sobre as razões dessa limitação e conduziu os estudantes à visualização alternativa do ponto $N(x, d)$, nomeadamente, a partir da análise gráfica da reta $y = d$ e da função f_k.

Face ao exposto, verifica-se que os referidos contributos do GeoGebra foram favorecidos pela multiplicidade de recursos dinâmico deste *software*, que permite a conexão e correlação entre registos das diferentes representações (verbal, geométrica, algébrica e tabular) dos conceitos de limite e continuidade. Por isso, os classifico como contributos do GeoGebra associados às *conexões entre representações* dos conceitos de limite e continuidade.

Relativamente às explorações do GeoGebra que possibilitam a realização de processos de raciocínios, nomeadamente, experimentação, formulação de conjeturas, generalização, a descoberta e prova ou refutação de proposição matemática relacionados ao limite e continuidade, tal como atesta Arzarello e Manzone (2017) e Slavícková (2013), observou-se que as explorações em *applets* do GeoGebra que continham animações da convergência da reta r_S à reta r_T ao gráfico de uma função, com indicações dos valores de seus respetivos declives m_S e m_T e da indicação geométrica $h \to 0$ ($h =$

$x - x_0$), tenham possibilitado a dedução de que m_T é obtido pelo limite m_S, quando $h \to 0$ e sua *tradução algébrica por* $m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, pelos estudantes. Para além disso, saliento que as explorações numéricas das medidas das dimensões e do volume de uma caixa, acompanhadas de simulações dinâmicas da sua planificação e formato tridimensional, na *applet* do GeoGebra, possibilitaram aos estudantes desenvolverem e expressarem algebricamente generalizações das medidas das dimensões da caixa, que os conduziram *à dedução da expressão algébrica da função contínua V que modela o volume da caixa.*

Esses contributos do GeoGebra classifico-os como associados aos *processos de raciocínio* sobre esses conceitos. Em resumo, apresento na tabela 10.2.2 os contributos do GeoGebra relativamente no trabalho com as diferentes representações dos conceitos de limite e continuidade.

Tabela 10.2.2 – Contributos do GeoGebra associado ao trabalho com as diferentes representações do limite e continuidade

	Descrição dos contributos do GeoGebra associado ao trabalho com as diferentes representações do limite e continuidade
Processos de visualização	❑ Possibilitou a construção de representação algébrica do limite com base nas noções formais de vizinhanças ❑ Possibilitou a tradução algébrica do declive da reta tangente ao gráfico de uma função no seu ponto máximo por $m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$
Conexões entre representações	❑ Possibilitou o reconhecimento do resultado algébrico $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{0}{0}$ como uma indeterminação de limite ❑ Possibilitou o reconhecimento de que o resultado algébrico $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \frac{k}{0}$ e/ou $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \frac{k}{0}$ determina limites laterais infinito ❑ Favoreceu a representação da definição formal do limite no infinito. ❑ Favoreceu o reconhecimento da continuidade como o critério para garantir a existência de $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = d$, com $d \in [f(a), f(b)]$
Processos de raciocínio	❑ Favorecido a dedução do declive da reta tangente ao gráfico de uma função no ponto x_0 por $m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ❑ Possibilitou deduzir a expressão algébrica da função contínua que modela volume de uma caixa de formato paralelepípedo

No que respeita ao papel do GeoGebra na resolução de problemas que envolvem os conceitos de limite e continuidade, os resultados indicam que as explorações no GeoGebra que permitem a conexão das diferentes representações de limite e continuidade tal como defende Aydo (2015), Dikovic (2009) e Öçal (2017), favoreceu a resolução geométrica do problema que consistia em determinar o valor do declive da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ em $x = 2$ e o reconhecimento de erros no procedimento de sua resolução algébrica. Esses contributos emergem das experimentações realizadas em *applets* do GeoGebra que continham animações da convergência da reta r_S à reta r_T ao gráfico de uma função, e que permitiam a conexão entre registos numéricos, algébricos e geométricos das convergências $r_S \to r_T$, $m_S \to m_T$ e $Q \to P$ no gráfico de uma função f, no processo de resolução do referido problema.

Também é evidente que as explorações numa *applet* do GeoGebra contendo a representação geométrica de uma função descontínua f_k, e que permitia a coordenação de registos algébrico e geométrico das partes do gráfico da função f_k, possibilitou aos estudantes identificarem geometricamente o valor de k que garante a continuidade da função f_k em $x = 2$, e deduzir o procedimento algébrico de determiná-lo, mediante a igualdade dos limites laterais em $x = 2$. Desta forma, esses contributos do GeoGebra são enquadrados numa classificação de contributos associados às *conexões entre representações* dos conceitos de limite e continuidade.

Já as explorações no GeoGebra que permite a descoberta, experimentação, generalização e teste experimental e prova ou refutação de proposição matemática, relacionados ao limite e continuidade, conforme aponta Arzarello e Manzone (2017), Slavicková (2013), revela ter possibilitado alguns estudantes deduzirem a estratégia correta de resolução algébrica das medidas das dimensões e do volume máximo de uma caixa de formato paralelepípedo. Esse contributo é resultado de explorações realizadas pelos estudantes na *applet* da tarefa T_{14}, que permitia realizar testes experimentais das medidas das dimensões da caixa, do posicionamento de ponto $P(x, f(x))$ e do registo geométrico da reta r_T ao gráfico da função V em P. Essas explorações revelam terem potencializado o raciocínio algébrico dos estudantes associados ao cálculo de limite, possibilitando-lhes representar o declive m_T no ponto máximo de V pela equação $\lim_{h \to 0} \frac{V(x_0+h)-V(x_0)}{h} = 0$ e resolvê-la, a fim de encontrar o x e as medidas das dimensões da caixa de volume máximo.

Ademais, aponto que experimentações realizadas no GeoGebra favoreceram a resolução geométrica de um problema de aplicação do TVI que consiste em provar a existência de raiz de um polinômio $p(x)$ num intervalo real $[a, b]$. Este contributo emerge das interações de um par de estudantes que recorreu inicialmente ao GeoGebra para a resolver graficamente o problema em questão, esboçando o gráfico do polinómio $p(x)$ para encontrar a solução gráfica e, após essa descoberta, deduzir estratégia correta da resolução algébrica do problema. Desta forma, esses contributos do GeoGebra são enquadrados na classificação de contributos associados aos *processos de raciocínio* sobre o limite e continuidade.

Em resumo, apresento na tabela 10.2.3 os contributos do GeoGebra na resolução de problemas que envolvem o limite e continuidade.

Tabela 10.2.3 – Contributos do GeoGebra na resolução de problemas que envolve o limite e continuidade

	Descrição dos contributos do GeoGebra na resolução de problemas que envolve os conceitos de limite e continuidade
Conexão entre Representações	❑ Favoreceu a resolução geométrica do problema que visa determinar o valor do declive da reta tangente ao gráfico de um função no ponto ❑ Possibilitou o reconhecimento de erros no procedimento da resolução do problema que visa determinar o valor do declive da reta tangente ao gráfico de um função no ponto ❑ Permitiu delinear a estratégia de resolução algébrica de um problema de aplicação dos critérios de continuidade de uma função
Processos de Raciocínio	❑ Permitiu deduzir a estratégia de resolução algébrica de um problema de otimização que das medidas das dimensões de uma caixa de formato paralelepípedo de volume máximo ❑ Permitiu resolver graficamente um problema de aplicação do TVI que consiste em consiste em provar a existência de raiz de um polinômio $p(x)$ num intervalo real $[a, b]$ e delinear a estratégia de sua resolução algébrica

10.3. A compreensão evidenciada no processo de aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade de funções e o contributo do GeoGebra para essa compreensão

O presente estudo tem como objetivo analisar que compreensão evidenciam os estudantes no processo de aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade de funções, no contexto de uma experiência de ensino de cunho exploratório, integrando o uso do GeoGebra. Para além disso, procuro perceber o contributo do GeoGebra para essa compreensão.

Sendo assim, sobre o primeiro objetivo, os resultados apresentados permitem-me concluir que as três dimensões adotadas do referencial teórico, nomeadamente, os significados atribuídos aos conceitos de limite e continuidade, o trabalho com suas diferentes representações e a resolução de problemas que os envolvem, se revelaram adequadas para analisar a compreensão que os estudantes evidenciam sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função, no decorrer da experiência de ensino.

A diversidade de significados corretos que a generalidade dos estudantes atribui ao limite e continuidade e que emergem dos seus *conceito-imagem evocado e conceito-definição* (Tall & Vinner, 1981), evidenciam uma conceção adequada dos estudantes sobre esses conceitos e necessária à compreensão dos mesmos, tal como afirma Domingos (2003), Fernández-Plaza et al., (2013) e Messias e Brandember (2015). Saliento que essa conceção adequada os conduziu, não somente à conclusão e justificação correta dos referidos conceitos apresentados nas tarefas, senão também, a tornar mais clara a conexão entre a definição informal e a definição formal desses conceitos. Sobre esta conclusão sublinho que esses estudantes, por um lado, apresentaram explicações corretas e elucidativas assentes nas noções intuitivas para concluir sobre a definição formal desses conceitos, e por outro, usam explicações corretas assentes nas noções formais para definir esses conceitos. Ainda que vários estudantes tenham manifestados significados conflitantes desses conceitos, em alguns momentos do estudo, decorrentes de dificuldades cognitivas (Tall, 1993; Tall & Vinner, 1981) ou obstáculos epistemológicos a eles associados (Cornu, 1991; Sierpisnka, 1985), os resultados apresentados mostram que conseguiram superar essas dificuldades no decurso da investigação.

No que respeita ao trabalho com as representações verifica-se que a maioria dos estudantes, quando solicitados a reconhecerem os conceitos de limite e continuidade representados algebricamente ou geometricamente, recorreram predominantemente à representação verbal para explicar adequadamente as simbologias que traduzem os conceitos. Para além disso, complementam-na com outros registos que traduzem igualmente esses conceitos, nomeadamente, registo numérico, algébrico, tabular ou geométrico, mostrando flexibilidade em realizar *conversões* entre representações, o que evidencia compreensão dos mesmos, segundo Duval (2006). Também se observa que a generalidade dos estudantes revela facilidade em representar e traduzir geometricamente os conceitos de limite e continuidade, a partir da *conversão* correta de sua representação algébrica, realizando *tratamentos* adequados de seus registos, alguns dos quais apoiados nas simbologias da definição formal desses conceitos.

Embora os estudantes tenham revelado dificuldades iniciais em representar algebricamente o conceito de limite na sua definição formal, e na tradução do declive da reta tangente ao gráfico de uma função no ponto x_0 pela taxa de variação instantânea, a sua maioria superou as dificuldades iniciais e foi capaz de: (i) transformar o conceito de limite pela expressão algébrica na sua definição formal quando se apresenta representado geometricamente, e representar formalmente a continuidade de uma função; e (ii) traduzir o declive da reta tangente ao gráfico de uma função no seu ponto máximo por $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$ ao resolver um problema de otimização. A mesma conclusão não se revela sobre o cálculo algébrico do limite no infinito, pois a maioria dos estudantes apresentaram dificuldades nos *tratamentos* dos registos algébricos no cálculo de limite no infinito, quando são consideradas expressões algébricas literais nesses registos. Essas dificuldades ao nível dos procedimentos algébricos, semelhantes às encontradas nos estudos de Maurice (2000) e Nair (2010), impediram a maioria dos estudantes de expressar algebricamente uma conjetura sobre os resultados do cálculo algébrico do limite no infinito de funções racionais.

Desta forma, apesar das dificuldades que apresentaram, é possível inferir que a generalidade dos estudantes foi capaz de realizar transformações (*tratamentos* e *conversões*) corretas entre as representações do conceito de limite e continuidade, o que evidencia compreensão adequada dos mesmos, segundo Duval (2006).

No que diz respeito à resolução de problemas, a generalidade dos estudantes foi capaz de mobilizar os seus conhecimentos adquiridos sobre o conceito de limite e continuidade para resolver corretamente problemas que requerem a aplicação da condição de existência do limite, da sua definição formal, e da taxa de variação instantânea, da aplicação da definição formal de continuidade, dos critérios de continuidade e do TVI.

Sobre a resolução de problemas associados ao conceito de limite, a maioria dos estudantes aplicou corretamente a igualdade de limites laterais (condição de existência do limite) para analisar, corrigir e justificar o erro de uma afirmação sobre a existência do $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Os estudantes, em geral, também analisaram corretamente proposições matemáticas que se propõe expressar a definição formal do limite, apresentando explicações corretas das desigualdades algébricas ($|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ ou $f(x) < M$) e do papel dos quantificadores e sua ordem nesses registos para as validar ou justificar incorreções nelas presentes. Apesar dos estudantes terem apresentado incorreções no registo algébrico de $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e/ou fragilidade nos procedimentos algébrico do cálculo do limite, que os impediram de aplicar corretamente a taxa de variação instantânea para encontrar o declive da reta tangente ao gráfico de uma função f em $x = x_0$ (tarefa T_{12}), verifica-se que a sua maioria superou essas dificuldades iniciais e foi capaz de aplicar a taxa de variação instantânea para resolver um problema de otimização, que envolvia a resolução de equação $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$ para determinar o volume máximo e as medidas de uma caixa de formato paralelepípedo (tarefa T_{14}). Desta forma, os resultados mostram que os estudantes são capazes de integrar conhecimentos dos diferentes aspetos associados ao conceito de limite (cálculo algébrico, definição formal, taxa de variação instantânea, e outros) relacionando-os num mesmo contexto para resolver problemas que envolvem este conceito, o que revela compreensão do mesmo, tal como atesta Domingos (2003), Juter (2006) e Swinyard e Larsen (2012).

Relativamente à resolução de problemas que envolvem o conceito de continuidade, alguns estudantes revelam dificuldades no uso da definição formal de continuidade para provar a continuidade de uma função num ponto de abscissa $x = x_0$. A incompreensão das desigualdades $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ e da correspondência $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$ nessa definição formal, dificuldades também identificadas nos estudos de Domingos (2003), Juter (2006) e Swinyard e Larsen (2012), evidenciam terem contribuído para que metade dos estudantes não conseguisse aplicar a definição formal para validar a continuidade da função, recorrendo a argumentos baseados na igualdade $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ para justificar a existência da continuidade. Ainda assim, quase todos os estudantes foram capazes de representar algebricamente a continuidade da função em $x = x_0$, traduzindo-a na sua definição formal, diferindo dos resultados de Domingos (2003) e Juter (2006).

Salienta-se, ainda, que os estudantes, em geral, apresentaram facilidade na aplicação dos critérios de continuidade e o do TVI para: (i) analisar proposições algébricas que envolvem o conceito de continuidade, provando-as ou justificando as incorreções nelas presentes e (ii) resolver problemas que recorrem à modelação matemática, quando os pressupostos destes aspetos da continuidade são explicitamente identificáveis no enunciado do problema. É possível inferir que o sucesso na resolução desses problemas tenha sido favorecido pelo uso adequado e correto das diferentes representações do conceito de continuidade, pelos estudantes. De facto, para analisar a veracidade das proposições algébricas dos problemas os estudantes constroem registos geométricos que traduzem as suas simbologias algébricas, aferindo nestes registos se os critérios de continuidade ou do TVI são satisfeitos e, com base nessa análise, validam ou refutam as proposições apresentando explicações verbais e/ou complementando-as com registos de gráficos de funções (des)contínuas como contraexemplos, o que revela adequada capacidade de correlacionar conhecimentos informais e formais sobre o conceito de continuidade, e que é essencial à compreensão deste conceito, tal como defende, Ko e Knuth (2009), Sealey et al. (2014) e Strand (2016).

Entretanto, quando os pressupostos do TVI não estavam explicitamente identificáveis no enunciado do problema, devendo ser traduzidos, alguns estudantes não conseguiram aplicar os conhecimentos sobre o conceito de continuidade para traduzir algebricamente o problema nas condições do TVI e resolvê-lo, apresentando pouco domínio da modelação e dificuldades com a Álgebra, o que revela incompreensões sobre o TVI, segundo Sealey et al., (2014) e Strand (2016).

Estes resultados permitem-me afirmar que os estudantes, de forma geral, evidenciam uma *compreensão relacional* (Skemp, 1976) dos conceitos de limite e continuidade, no final da experiência de ensino, e aprendizagem desses conceitos, sendo possível concluir que foram capazes de relacionar diferentes significados e diversas representações desses conceitos e de os mobilizar na resolução de problemas que os envolvem. Os estudantes revelaram terem sido capazes de:

- reconhecer os conceitos de limite e continuidade quando representado algebricamente ou geometricamente, com registos assentes nas noções intuitivas de aproximação ao objeto ou nas simbologias da definição formal, atribuindo-lhe corretos significados e apropriado ao contexto em questão, e sendo capazes de utilizar e conectar diferentes representações desses conceitos (verbal, numérica, tabular, algébrica e geométrica) para concluir sobre suas respetivas existências;
- reconhecer que o limite é alcançado pela função atribuindo-lhe corretos significados;
- reconhecer o conceito de limite a partir do resultado do seu cálculo algébrico, concluindo corretamente que os resultados algébricos $\frac{0}{0}$ e $\frac{k}{0}$ no cálculo de limite no ponto

de funções racionais correspondem, respetivamente, a um tipo de indeterminação de limite e ao limite infinito cuja implicação geométrica descreve uma assíntota vertical ao gráfico da função f em x_0;

- representar algébrica ou geometricamente os conceitos de limite e continuidade, com registos assentes nas noções intuitivas de aproximação ao objeto ou nas simbologias da definição formal, apresentando correto *tratamento* e *conversão* dos registos transformados;
- representar corretamente a definição formal dos conceitos de limite e de continuidade e aplicá-las corretamente na validação desses conceitos e na análise de erros de proposições matemáticas que se propõe defini-los formalmente;
- aplicar corretamente técnicas algébricas para calcular o valor do limite, resolver a indeterminação $\frac{0}{0}$ no cálculo de limite, calcular o declive da reta tangente ao gráfico de uma função como resultado da taxa de variação instantânea e validar a continuidade de uma função num ponto;
- aplicar a taxa de variação instantânea de uma função para resolver problemas de otimização, apresentando procedimento correto de cálculo algébrico do limite.
- mobilizar conhecimentos sobre os critérios de continuidade e o TVI e aplicá-los corretamente na validação ou refutação de proposições matemáticas, ou ainda na resolução de problemas que apelem à modelação matemática, e que visem garantir a existência de raiz de uma função.

Alguns estudantes ainda mantém uma *compreensão instrumental* (Skemp, 1976) no final da intervenção. Esses estudantes apresentaram fraca capacidade de construir representações identificáveis dos conceitos de limite e continuidade, causada por falta de rigor geométrico, algébrico ou verbal nos registos das representações. Também apresentaram fragilidade nas transformações (*tratamentos* e *conversões*) entre as diferentes representações (algébricas e geométricas) desses conceitos, o qual os impediu de concretizar algumas traduções desses conceitos, como por exemplo, a representar algebricamente os resultados do cálculo algébrico do limite no infinito de funções racionais $\left[\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\right]$ e apresentar uma conjetura sobre ele, e representar geometricamente a continuidade representada pela expressão algébrica de sua definição formal. Para além disso, apresentam dificuldades na resolução de problemas que requerem o uso de procedimentos de cálculo algébrico do conceito de limite e na aplicação do TVI quando os seus pressupostos não são explicitamente identificáveis no enunciado do problema, revelando fragilidade na integração e articulação entre diferentes conhecimentos matemáticos associados a esses conceitos.

No que diz respeito ao segundo objetivo do estudo que consiste em perceber o contributo do GeoGebra para a compreensão dos conceitos de limite e continuidade, os resultados permitem-me concluir que os contributos do GeoGebra que emergiram dos dados dão uma boa indicação das potencialidades deste *software* para a construção de significados corretos dos conceitos de limite e continuidade, para favorecer o trabalho com as suas diferentes representações e para possibilitar a resolução de problemas que os envolve. Para além disso, é visível nos resultados que esses contributos têm por base um conjunto de três elementos evidenciadores das potencialidades do GeoGebra (Leung, 2017), nomeadamente, *processo de visualização, conexões entre representações* e *processos de raciocínio*, os quais podem servir de referencial para a análise do papel do GeoGebra à compreensão desses conceitos (tabela 10.3.1).

Tabela 10.3.1 - Categorias de análise do papel do GeoGebra para a compreensão dos conceitos de limite e continuidade e respetivos descritores

CONTRIBUTO DO GEOGEBRA	
Processos de visualização	Aspetos da exploração no GeoGebra que favorecem visualização dos conceitos de limite e continuidade.
Conexões entre representações	Aspetos da exploração no GeoGebra que favorecem a conexão entre diferentes representações destes conceitos, correlacionando-as entre si.
Processos de raciocínios matemático	Aspetos da exploração no GeoGebra que possibilitam a descoberta, experimentação, formulação de conjeturas, generalização e prova ou refutação de proposição matemática relacionadas a estes conceitos.

Os *processos de visualização* enquadram aspetos da exploração no GeoGebra que favorece visualização dos conceitos de limite e continuidade, tal como apontado por Alves (2010), Dikovic (2017), Hohenwarter et al., (2008) e Rocha (2010). Considera-se a visualização de um conceito matemático o ato de deduzir significados de diferentes aspetos a ele relacionado (simbologias, diferentes representações, relações, propriedades, etc) e o seu reconhecimento a partir destes aspetos, tal como considerado por Arcavi (2003) e Duval (1999). Os aspetos da exploração no GeoGebra que de acordo com Aydo (2015), Dikovic (2009) e Öçal (2017) favorecem a conexão entre diferentes representações destes conceitos, correlacionando-as entre si, são enquadrados na categoria *conexões entre representações*. Finalmente, os aspetos do GeoGebra que de acordo com Arzarello e Manzone (2017) e Slavicková (2013) possibilitam a experimentação, descoberta, formulação de conjeturas, generalização e justificação de propriedades matemáticas relacionadas a estes conceitos, estão compreendidos na categoria *processos de raciocínios matemático*.

Saliento também dos resultados, que as explorações do GeoGebra contribuíram para que alguns estudantes ultrapassem dificuldades que encontraram na aprendizagem do limite e continuidade. Por exemplo, o procedimento algébrico para determinar o valor de k que garante a continuidade da função f_k em $x = 2$ (T_{13}) não foi conseguido de forma imediata por alguns pares de estudantes, que inicialmente, desconheciam ou tomaram erradamente, o procedimento de determinação do k. Contudo verifica-se que as explorações dinâmicas na *applet* e a conexão de registos algébricos e geométricos da (des)continuidade da função f_k, ajudaram esses pares de estudantes a reconhecerem a estratégia de determinação do k (igualdade dos limites laterais).

Uma dificuldade dos estudantes na aprendizagem do limite e continuidade diz respeito a incompreensões de proposições na forma algébrica, tais como, a definição formal desses conceitos, simbologias algébricas do TVI, entre outras, que em geral são abstratas e complicadas de compreender segundo Domingos (2003), Swinyard e Larsen (2012) e Sealey et al., (2014. Os resultados revelam que incompreensões de algumas dessas proposições foram superadas ou minimizadas com explorações no GeoGebra, que permitiam a conexão de registos algébricos e geométricos associados ao limite e continuidade. Sobre esta conclusão aponto que, ao recorrerem aos registos geométricos do conceito de limite em *applets* do GeoGebra para confirmar e visualizar registos algébricos associados à sua definição formal, alguns estudantes desenvolveram conceitos imagem corretos do limite, permitindo-lhes atribuir significado correto à relação entre os quantificadores ($\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ ou $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A > 0$) e da correspondência entre as desigualdades $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ ou $x > A$, $|f(x) - L| < \varepsilon$ sobre as quais possuíam dúvidas, e traduzir o limite no ponto e o limite no infinito nas suas respetivas definição formal.

No trabalho com modelação matemática envolvendo funções, uma dificuldade muito comum dos estudantes consiste na impossibilidade de realizar generalização das relações funcionais, causado por fragilidade de manipulações algébricas, acompanhadas muitas vezes de limitação visual bidimensional e tridimensional dos gráficos, tal como afirmam Juter (2006), Maurice (2000) e Palis (2008). No presente estudo, um par de estudantes mostrou inicialmente dificuldade na modelação da caixa de formato paralelepípedo, nomeadamente, na identificação das medidas de suas dimensões e seu formato. Por não se aperceberem que a altura da caixa difere da sua largura e comprimento, associaram a caixa a um cubo, o que conduziu ao cálculo errado do volume da caixa. Entretanto, o recurso à visualização tridimensional e dinâmica de diferentes exemplos da caixa, contendo o valor do seu volume, favoreceu o reconhecimento do erro ao assumir a caixa como um cubo, permitindo-lhes corrigi-lo e realizar generalizações que conduziram essas estudantes à tradução algébrica da função que modela o volume da caixa.

Na resolução de problemas que permitiram o GeoGebra como recurso, os estudantes quando têm dificuldade na resolução de um problema por procedimentos algébricos, recorrem frequentemente às explorações das *applets* do GeoGebra e de algumas de suas ferramentas, para construir gráficos de funções, realizar simulações dinâmicas e/ou testes experimentais, permitindo-lhes resolver problemas graficamente e/ou delinear a estratégia para a sua resolução algébrica. Deste modo, como em Fonseca (2011), é possível inferir destes resultados que o GeoGebra contribui para a criação de um ambiente de aprendizagem com compreensão, rico e eficiente que não é possível num contexto de lápis e papel, que permite a migração da cadeia formal do ensino de Matemática, representada pela sequência 'definição → teorema → demonstração → corolário (aplicações)', onde o estudante tem um papel passivo, para a cadeia exploratória, caracterizada por 'exploração → conjetura → tentativa de demonstração → conclusão e aplicação', onde ele será um agente ativo na sua aprendizagem, permitindo-lhe desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos enquanto os aprende.

10.4. Reflexões finais

Os resultados aqui apresentados sugerem que a realização de tarefas exploratórias com o uso integrado do GeoGebra pode ser usada no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos de Cálculo, no ensino superior, como os de limite e continuidade de funções, para conduzir a uma aprendizagem com compreensão. Este tipo de estratégia didática contribuiu para uma participação mais ativa dos estudantes na realização das tarefas e para promover aprendizagens mais efetivas sobre os conceitos matemáticos e a sua aplicação na resolução de problemas. Esse trabalho foi reconhecido inclusive pelos estudantes, como positivo, para a aprendizagem dos conteúdos abordados, nas respostas ao questionário final e comentários na entrevista final.

O trabalho colaborativo entre os estudantes no laboratório de Informática, a partir da resolução das tarefas exploratórias integradas ao GeoGebra, a descentralização do ambiente de exposição de conteúdos no quadro e o incentivo, os desafios e as explicações do professor-investigador, em geral, ajudaram-nos a consolidar as aprendizagens e a realização de novas descobertas. Também as interações entre os estudantes (pares ou trio) que permitiu a partilha e discussão de seus conhecimentos; e a verbalização de seus raciocínios na realização, teste, validação ou refutação de hipóteses e na aplicação dos conceitos aprendidos para resolver problemas, favoreceram o desenvolvimento de um ambiente no qual pudessem aprender a trabalhar cooperativamente, favorecendo o trabalho investigativo. Para além disso, essas interações proporcionaram ao estudante um ambiente em que ele pôde analisar as suas ideias e, quando questionado, justificá-las, contribuindo assim para a identificação dos seus erros apresentados no momento da resolução das tarefas ou reforço da sua aprendizagem.

Esse ambiente proporcionou ainda aos estudantes (futuros professores de Matemática) o contato com novas experiências de ensino que poderão ser úteis a eles durante sua futura prática em sala de aula. Eles reconheceram o potencial das tarefas exploratórias e do uso do GeoGebra para criar ambientes de aprendizagem promotores de aprendizagens significativas. Isso os incentivou à possibilidade do uso das modernas ferramentas computacionais que lhes são oferecidas, a fim de promover um ambiente interativo a seus alunos, conforme é salientado pelos estudantes nas respostas ao questionário final.

Em relação ao impacto deste estudo no curso de Licenciatura em Matemática do IFRJ/Campus Nilópolis, após a sua realização, fiz um levantamento de dados junto à secretaria do referido curso sobre a situação de aprovação, reprovação e evasão na disciplina de Pré-Cálculo entre os anos de 2012 a 2016, período em que atuei como professor na disciplina de Pré-Cálculo do IFRJ/Campus Nilópolis até a realização da experiência de ensino. Os dados tabulados estão apresentados na figura 10.3.1.

Turmas de Pré-Cálculo dos anos de 2011 - 2016
Licenciatura em Matemática do IFRJ/Nilópolis

	2012.1	2012.2	2013.1	2013.2	2014.1	2014.2	2015.1	2015.2	2016.1
Aprovados	18%	20%	24%	15%	13%	20%	28%	16%	32%
Reprovados	7%	8%	20%	6%	8%	16%	15%	16%	9%
Desistentes	75%	72%	56%	79%	79%	64%	57%	68%	59%
Total de estudantes inscritos	56	98	70	60	73	56	60	45	46

Figura 10.3.1 – Levantamento estatístico de situação acadêmica dos alunos de Pré-Cálculo dos anos de 2011 até 2016

Os dados apresentados nessa tabela indicam que embora a percentagem de desistência em Pré-Cálculo ainda seja alta, os semestres letivos em que foram realizadas as intervenções didáticas que servem de base a esta pesquisa (2015.1 e 2016.1) apresentaram o maior número de aprovados e queda acentuada no número de desistente. Esses resultados evidenciam um sucesso maior dos estudantes quando participantes nesta experiência em relação aos restantes estudantes e sugerem que a investigação em torno dessa abordagem de ensino e aprendizagem deva ser mantida em outros semestres letivos, no intuito de se alcançarem resultados cada vez melhores.

Considero oportuno salientar que realização deste estudo constituiu para mim numa enorme fonte de aprendizagem com vista ao meu desenvolvimento profissional, como investigador e professor inserido na área da Educação Matemática. A revisão da literatura sobre o tema ‘a aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade’ que mostra a relevância e pertinência de sua investigação na formação inicial de professores de Matemática, através de uma experiência de ensino que considere a realização de tarefas exploratórias com recurso ao GeoGebra, e ainda a construção do quadro de análise que permite responder as questões do estudo e todo o planeamento, experimentação e análise da experiência de ensino que suporta a sua realização, são motivos de intenso investimento de tempo e muita dedicação para superar os obstáculos e dificuldades encontrados no decurso do estudo, e constituíram experiências valiosas ao meu desenvolvimento profissional enquanto investigador.

Já como professor, saliento que as experiências por mim vividas no planeamento e execução das aulas, que contemplam (i) a elaboração e aplicação dos materiais usados nas aulas, nomeadamente, as tarefas e *applets* do GeoGebra propostos e (ii) a gestão de sala de aula, interagindo com os estudantes na condução de suas aprendizagens e esclarecimentos de dúvidas, refletindo sobre suas dificuldades a fim a desenvolver estratégias que permitam os estudantes superá-las, ao longo do estudo, constituíram contributos deste estudo para o desenvolvimento da minha própria prática e reflexões sobre o meu papel enquanto professor.

Finalmente, considero pertinente apresentar alguns contributos deste estudo para a investigação em Educação Matemática. Este estudo proporciona um aprofundamento do conhecimento sobre a aprendizagem de conceitos de Cálculo no ensino superior, particularmente de limite e continuidade de funções. Dele decorre que a compreensão relacional evidenciada pela generalidade dos estudantes sobre o limite e continuidade constitui um adequado conhecimento matemático destes conceitos, apresentado por esses futuros professores no início da sua formação inicial, e que é fundamental para prosseguir o percurso de sua formação.

Apesar de seus resultados não permitirem generalizações face às características particulares do seu contexto e participantes, considero que o modelo teórico das categorias de análise da compreensão do limite e continuidade (Figura 5.2), apresentado no capítulo da metodologia, constitui um contributo deste estudo relativamente às investigações em Educação Matemática que se propõem promover e analisar a compreensão matemática. Os três elementos evidenciadores da compreensão, nomeadamente, os significados atribuídos ao conceito matemático, o trabalho com as suas diferentes representações e a resolução de problemas que o envolve, são constituintes de qualquer conceito matemático. Saliento, ainda, que o quadro de análise da compreensão aqui desenvolvido não pretende dar uma definição de compreensão matemática universalmente aceite, mas uma que é adequada aos objetivos do estudo.

Também destaco que as categorias de análise do papel do GeoGebra para a compreensão dos conceitos de limite e continuidade, que emergiram dos dados (tabela 10.3.1), para além de constituírem um dos resultados deste estudo também pode servir de referencial para a análise do papel do GeoGebra na compreensão dos conceitos matemáticos, pois essas categorias resultam da classificação de potencialidades do GeoGebra na aprendizagem dos conceitos matemáticos, que inclui o limite e continuidade.

Saliento, igualmente, que a experiência de ensino, tal como foi planeada, e a sequência de tarefas que foram aplicadas com recurso ao GeoGebra, também podem ser um contributo deste estudo para os professores e pesquisadores que procuram abordagens de ensino promotoras de aprendizagens com compreensão dos conceitos de limite e continuidade, numa fase de introdução ao Cálculo, incluindo no curso de Licenciatura em Matemática do IFRJ/Campus Nilópolis. Neste sentido, todos os materiais usados na pesquisa poderão ser utilizados por algum professor na replicação dessa experiência para o ensino e aprendizagem desses conceitos, sendo possível a adaptação de algum desses materiais (tarefas e *applets*) a outras condições de professores de Matemática.

Para além das contribuições referidas, há também que ter em conta uma reflexão sobre uma limitação identificada neste estudo, que se prende aos tipos de funções usadas nas sequências de tarefas com recursos ao GeoGebra para a promoção da aprendizagem do limite e continuidade. Essas sequências de tarefas contemplaram maioritariamente as funções algébricas (potências, polinomiais e racionais), havendo poucas experiências exploratórias sobre o limite e continuidade de funções transcendentes (exponencial, logarítmicas e trigonométricas) neste estudo, devido a falta de tempo. Seria, então, pertinente, num novo estudo, realizar ajustes nas sequências de tarefas a fim de incluir as funções transcendentes no percurso de aprendizagem do limite e continuidade e verificar se os resultados aqui evidenciados se mantêm com a inclusão destas funções. Esclareço que neste estudo, o limite e continuidade das funções transcendentes foram trabalhados com os estudantes, em momentos de sistematização das aprendizagens após a resolução das tarefas da experiência e de forma mais expositiva.

Também considero pertinente realizar ajustes em algumas tarefas, diminuindo o número de suas questões, a fim de proporcionar um tempo maior para a discussão coletiva e sistematização das aprendizagens. Isto porque identifiquei que a resolução de algumas tarefas se tornou muito extensa, devido ao grande o número de processos e procedimentos algébricos exigido na sua resolução. Saliento ainda, que sinto a necessidade de trabalhar mais profundamente os processos e procedimentos no âmbito da Álgebra associados aos conceitos de limite e continuidade, que considerem expressões literais e encaminhe os estudantes a generalizações. Esses aspetos associados à Álgebra foram as causas das maiores dificuldades apresentadas pelos estudantes na resolução de problemas.

Por todo o exposto, a análise dos resultados positivos desta experiência e a reflexão sobre as suas possíveis limitações aponta para possibilidade de argumentar a favor de que a aprendizagem do limite e continuidade deva ser conduzida por uma experiência de ensino que possua três princípios: (i) conduzida por uma abordagem de ensino exploratório que considere a realização de sequências de tarefas de natureza exploratória e integrando as tecnologias digitais, como o GeoGebra, para a promoção dos conceitos e a resolução de exercícios e/ou problemas para sua consolidação e sistematização das aprendizagens; (ii) essa abordagem deve considerar o desenvolvimento de significados corretos desses conceitos, a articulação entre suas diferentes representações e a sua mobilização na resolução de problemas; e (iii) contemplar um percurso de aprendizagem que considere inicialmente o desenvolvimento de noções intuitivas, seguido pela prática de cálculo algébrico antes do trabalho com noções formais.

Uma experiência de ensino sustentada nestes princípios contribui para promover o desenvolvimento do *conhecimento matemático* dos futuros professores de Matemática, podendo favorecer uma aprendizagem com compreensão dos referidos conceitos.

Por fim, saliento igualmente que este estudo é uma primeira etapa para investigar a compreensão dos estudantes sobre o limite e continuidade, considerando os três elementos evidenciadores de compreensão e o papel do GeoGebra para a compreensão desses conceitos. O modo como essa compreensão emerge e se desenvolve requer um aprofundamento dos recursos e estratégias que para isso contribuíram.

Referências bibliográficas

AERA (2011). Code of ethics. *educational researcher*, *40*(3), 145-156. doi:10.3102/0013189X11410403.

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática*, *8*, 7-10 e 35.

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2006). *A Matemática na formação inicial de professores*. Lisboa: APM e SPCE.

Alibert, D., & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 215-230). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Alves, D. (2010). *Ensino de funções, limites e continuidade em ambientes educacionais informatizados: Uma proposta para cursos de introdução ao cálculo.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215–241.

Artigue, M. (1991). Analysis. In D. Tall (Ed.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Arzarello, F., & Manzone, D. (2017). The planimeter as a real and virtual instrument that mediates an infinitesimal approach to area. In A. Leung & A. Baccaglini-Frank (Eds.), *Digital technologies in designing mathematics education tasks: Potential and pitfalls* (121–149). Cham: Springer.

Ávila, G. (2002). O ensino do cálculo e da análise. *Revista Matemática Universitária*, *33*, 83-95.

Aydos, M. (2015). *The impact of teaching mathematics with geogebra on the conceptual understanding of limits and continuity: the case of turkish gifted and talented students.* Dissertação de Mestrado, Universidade Ankara, Turquia.

Ball, D., Hill, H., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator Fall*, *29*(1), 14-17, 20-22, 43-46.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Barbosa, S. (2009). *Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia*. Tese de Doutoramento em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Brasil.

Biza, I., & Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior*, *29*(4), 218-229.

Biza, I., Diakoumopoulos, D., & Souyoul, A. (2007). Teaching analysis in dynamic geometry environments. In *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1359-1368). Larnaca, Cyprus.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Branco, N. (2013). *O desenvolvimento do pensamento algébrico na formação inicial de professores nos primeiros anos*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Portugal.

Branco, N., & Ponte, J. P. (2014). Um estudo de integração de recursos multimédia na formação inicial de professores do 2º ciclo do ensino básico. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 515-536). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

BRASIL (1939). *Presidência da república. decreto-lei nº 1190 de 4 de abril de 1939.* In Faculdade Nacional de Filosofia (Org). Recuperado de http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1930-1939/decreto-lei-1190-4-abril-1939-349241-publicacaooriginal-1-pe.html.

BRASIL (1996). *Lei de diretrizes e base da educação nacional-lei n.º 9394/96.* Recuperada de http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm.

BRASIL (2001). *Parecer CNE/CP 009/2001.* Diretrizes curriculares nacionais para a formação de professores da educação básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/009.pdf.

BRASIL (2002a). *Resolução do conselho nacional de educação - CNE/CP nº 1, de 18 de fevereiro de 2002.* Diretrizes curriculares Nacionais para a formação de professores da educação básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_02.pdf.

BRASIL (2002b). *Resolução do conselho nacional de educação- CNE/CP n. 2, de 19 de fevereiro de 2002.* Institui a duração e a carga horária dos cursos de licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da Educação Básica em nível superior. Recuperada de http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CP022002.pdf.

BRASIL (2006). *PCN+: ensino médio – orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais.* Brasília: MEC.

BRASIL (2018). *Base nacional comum curricular: ensino médio*. Brasília: MEC. Recuperado de http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.

Bressoud, D, Mesa, V., & Rasmussen, C. (2015). *Insights and recommendations from the maa national study of college calculus*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da matemática: práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11–17.

Carpenter, T., & Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understandig* (pp. 19-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Celestino, M. (2008). *Conceções sobre limite: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do Ensino Superior*. Tese de Doutoramento em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Cheng, K., & Leung, A. (2015). A dynamic *applet* for the exploration of the concept of the limit of a sequence. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *46*(2),187–204.

Cobb, P., & Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(2), 83-94.

Conceição, C., & Sousa, O. (2014). Pré-cálculo e a formação inicial de professores de Matemática: resultados preocupantes de um teste diagnóstico. *Revista Lusófona de Educação*, *25*, 135-155.

Conference Board of the Mathematical Sciences – CBMS (2012). *The mathematical education of teachers ii*. Providence, RI and Washington, DC: American Mathematical Society and Mathematical Association of America.

Coutinho, C. (2011). *Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas: teoria e prática*. Coimbra: Almedina.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Cottrill, J., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996) Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process schema. *Journal of mathematical behavior, 15*, 167-192.

Creswell, J. (2007). *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Porto Alegre: Artmed.

Cruz, M. (2010). *Uma proposta metodológica para a realização do estágio supervisionado em um curso de formação inicial de professores de matemática: limites e possibilidades*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Brasil).

Czarnocha, B., & Prabhu, V. (2006). Teaching-research and design experiment: two methodologies of integrating research and classroom practice. In *Electronic proceedings of episteme-1: international conference to review research on science, technology, and mathematics education*. Recuperado de http://www.hbcse.tifr.res.in/episteme/episteme-1/themes/OP_Czarnocha_PrabhuModified.pdf.

Dikovic, L. (2009). Examining continuity/discontinuity of a function by using geogebra. *Teaching Mathematics and Computer Science 7*(2), 241-257.

Dikovic, L. (2017). Understanding and visualization of the uniform continuity of functions. In *Proceedings of the international conference on advanced technologies enhancing education - ICAT2E 2017* (pp. 6-10). Qingdao, China.

Domingos, A. (2001). Contextos escolares que favorecem o pensamento matemático avançado. In D. Moreira et al. (Eds.). *Matemática e comunidades: A diversidade social no ensino-aprendizagem da matemática*. *Anais do Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE* (pp. 113-122). Consolação: SEM-SPCE.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – A matemática no início do Superior*. Tese de Doutoramento em Educação, Universidade de Lisboa, Portugal.

Duarte, A., Oliveira, M., & Pinto, N. (2010). A relação conhecimento matemático versus conhecimento pedagógico na formação do professor de Matemática: um estudo histórico. *ZETETIKÉ, 33*(18), 103-134

Duval, R. (1999). representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of 21st annual meeting of the north American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 3-26). Columbus, OH: ERIC.

Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*, 103-131.

Fernández-Plaza, J., Ruiz-Hidalgo, J., & Rico, L. (2013). análisis conceptual de términos específicos: concepto de límite finito de una función en un punto. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)*, *16*(1), 131-146.

Finney, R., Demana, F., Waits, B., & Kennedy, D. (2009). *Calculus: graphical, numerical, algebrical* (3rd ed.). New Jersey: Pearson.

Fiorentini, D., Nacarato, A., Ferreira, A., Lopes, C., Freitas, M., & Miskulin, R. (2002). Formação de professores que ensinam matemática: um balanço de 25 anos de pesquisa brasileira. *Educação em Revista* (36), 137-159.

Fonseca, V. (2011). *O uso de tecnologias no ensino médio: a integração de mathlets no ensino da função afim*. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.

Fonseca, V., & Henriques, A. (2016). A aprendizagem do conceito de limite de funções com recurso a tarefas exploratórias e ao geogebra. In A. P. Canavarro, A. Borralho, J. Brocardo & L. Santos, (Eds.), *Atas do encontro em investigação em educação matemática* (pp. 303-318). Évora: SPIEM.

Fonseca, V., & Henriques, A. (2017). Aprendizagem da definição formal de limite de funções: análise da aplicação de uma tarefa exploratória com o geogebra. In *Libro de Actas del VIII Congreso iberoamericano de educación matemática* (pp. 190-200). Madrid: Federación española de sociedades de profesores de matemáticas.

Fonseca, V., & Henriques, A. (2018a). Compreensão da definição formal de limite: um estudo na formação inicial de professores de Matemática. *Bolema*, *32*(62), 1030-1049. doi: 10.1590/1980-4415v32n62a14.

Fonseca, V., & Henriques, A. (2018b). A aprendizagem do teorema do valor intermédio numa abordagem exploratória com recurso ao geogebra. In *Atas do V Congresso Internacional TIC e Educação* (pp. 566-576). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Fonseca, V., & Henriques, A. (2019). A aprendizagem do teorema do valor intermédio numa abordagem exploratória com o geogebra. *Intersaberes*, *14*(31), 129-144.

Fonseca, V., Silva, A., Cassiano, M., & Gaspar, J. (2015). Uso do geogebra no ensino das funções exponencial e logarítmica: aplicação da escala logarítmica nos abalos sísmicos. In *Atas do XVI Encontro Nacional de Educação em Ciências* (440-445). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Fonseca, V., Silva, A., Santos, B., Santiago, E., & Marçal, I. (2013). Conceito imagem e conceito definição no estudo das funções exponenciais com o geogebra. In *Anais* *do VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática*. Canoas: Universidade Luterana do Brasil.

Garzella, F. (2013). *A disciplina de cálculo i: análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos*. Tese de Doutoramento, Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

Gnudi, A., & Criscuolo, A. (2013). Study of functions in a geogebra environment during "learning week" for mathematics extra lessons. *North American GeoGebra journal*, *43*(4), 465-493.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: a unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G. Martin e D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275-285). Virginia: NCTM.

Gutiérrez-Fallas, L., & Henriques, A. (2017). A compreensão de alunos de 12.º ano dos conceitos de limite e continuidade de uma função. *Quadrante*, *26*(1), 25-49.

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. Em Douglas A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York, NY: Macmillan.

Hill, H., & Ball, D. (2009). The Curious--and Crucial--Case of Mathematical Knowledge for Teaching. *Phi Delta Kappan, 91*(2), 68-71.

Henning, A., & Hoffkamp, A. (2013). Developing an intuitive concept of limit when approaching the derivative function. In *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (1359-1368). Ankara, Turkey.

Henriques, A., & Ponte, J. (2014). As representações como suporte do raciocínio matemático dos alunos quando exploram atividades de investigação. *Bolema*, *28*(48), 276-298.

Hohenwarter, M., & K. Fuchs (2004). Combination of dynamic geometry, algebra and calcules in the software system geogebra. In *Proceedings of Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference* (pp. 128-133). Pécs, Hungary.

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., & Lavicza, Z. (2008). Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software geogebra. In

Proceedings of the 11th International Conference in Mathematics Education – ICME 11 (1-9). Monterrey, Mexico.

Juter, K. (2006). *Limits of functions – university students' concept development*. PhD thesis, Lulea University of Technology, Sweden.

Leung, A. (2017). Exploring techno-pedagogic task design in the mathematics classroom. In A. Leung & A. Baccaglini-Frank (Eds.), *Digital technologies in designing mathematics education tasks: Potential and pitfalls* (pp. 3–16). Cham: Springer.

Lima, E. (2006). Análise real. Funções de uma variável (volume1). *Coleção Matemática Universitária* (8ª ed.). Rio de Janeiro: IMPA.

Lüdke, M. (2001). *O professor e a pesquisa*. Campinas: Papirus.

Lüdke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Karatas, I., Guven, B., & Cekmez, E. (2011). A cross-age study of students' understanding of limit and continuity concept. *Bolema*, *24*(38), 245-264.

Ko, Y., & Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *Journal of Mathematical Behavior, 28*(1), 68-77.

Malaspina, U., & Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics, 75*, 107-130.

Maurice, L. (2000). *Les idées d'élèves du collégial à propos des limites de fonctions rationneIles faisant intervenir le zéro et I'infmi*. Thèse Doctor em Philosophiae, Université Laval, Canadá.

Meyer, J., & Júnior, A. (2002). A utilização do computador no processo de ensinar-aprender Cálculo: a constituição de grupos de ensino com pesquisa no interior da universidade. *Zetetiké, 10*(17), 113-142.

Messias, M. & Brandember, J. (2015). Discussões sobre a relação entre limite e continuidade de uma função: investigando imagens conceituais. *Bolema, 53*(29), 1224-1241.

Mira-López, M. (2016). *Desarrollo de la comprensión del concepto de límite de una función: características de trayectorias hipotéticas de aprendizaje*. Tese de Doutoramento, Universidade de Alicante, Espanha.

Mishra, P., & Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for integrating technology in teachers' knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017–1054.

Nair, G. (2010). College students' concept image of asymptotes, limits and continuity of rational functions. PhD thesis, College of Education and Human Ecology, USA.

NCTM (1998). *Normas profissionais para o ensino da matemática.* Lisboa: APM e IIE. (Tradução portuguesa da edição original de 1994).

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2014). *Principles to actions: ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: Author.

Öçal, M. (2017). The effect of geogebra on students' conceptual and procedural knowleDGS: The case of applications of derivative. *Higher Education Studies*, *7*(2), 67-78.

Oliveira, H., & Cyrino, M. (2011). A formação inicial de professores de matemática em Portugal e no Brasil: Narrativas de vulnerabilidade e agência. *Interacções, 18*, 104-130.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 235-250.

Orts, A., Llinares, S., & Boigues, F. (2016). Elementos para una descomposición genética del concepto de recta tangente. *Avances de Investigación, em Educación Matemática* (AIEM), *10*, 111-134.

Pagani, E., & Allevato, N. (2014). Ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral: um mapeamento de algumas teses e dissertações produzidas no Brasil. *Vidya*, *34* (2), 61-74.

Palis, G. (2008). Introduction to calculus: integrating maple in regular classes and examinations. In Proceedings of *11th International Conference on Mathematics Education* (ICME 11), Topic Study Group 5: New developments and trends in mathematics education at tertiary level. Monterrey: ICME.

Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva. (Trabalho original publicado em 1945).

Pons, J., Valls, J., & Llinares, S. (2011). Coordination of aproximations in secondary school students' understanding of limit concept. In Ubuz, B. (Ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics*. (392-400). Ankara, Turquia: PME.

Ponte, J. (1992). Conceções dos professores de matemática e processos de formação. In *Educação matemática: temas de investigação* (pp. 185-239). Lisboa: IIE.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. (2012). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. In N. Planas (Coord.), *Teoria, crítica y prática de la educación* matemática (pp. 83-98). Barcelona: Graó.

Ponte, J. (2014). Formação do professor de matemática: perspetivas atuais. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de* Matemática (pp. 343-360). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ponte, J., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education.* (vol. 2, pp. 225-263). New York, NY: Routldge.

Ponte, J., & Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 275-296). New York, NY: Routledge.

Ponte, J., Brocado, J., & Oliveira, H. (2013). Investigações matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: *Autêntica*.

Ponte, J., Januário, C., Ferreira, I., & Cruz, I. (2000). *Por uma formação inicial de professores de qualidade.* Documento de trabalho da Comissão ad hoc do CRUP para a formação de professores.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics, 55,* 103-132.

Reis, F. (2001). *A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.* Tese de Doutoramento, Universidade de Campinas, Brasil.

Rezende, W. (2003). *Ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. Tese de Doutoramento, Universidade de São Paulo, Brasil.

Rocha, M. (2010). *Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes & F. Araújo (Coords.). *Avaliação das aprendizagens: das concepções às práticas* (pp. 77-84). Lisboa: ME, DEB.

Schoenfeld, A. (1995). A Brief Biography of Calculus Reform, *UME Trends, 6*(6), 3-5.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT. (Trabalho original publicado em 1991)

Sealey, V., Deshler, J., & Hazen, K. (2014). Strengthening student understanding of mathematical language through verbal and written representations of the intermediate value theorem. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *24*(2), 175-190.

Serrazina, M. (2014). O professor que ensina matemática e a sua formação: uma experiência em portugal. *Educação & Realidade, 39*(4), 104-130.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-21

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *6*(1), 5-67.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. Londres: Flamer Press.

Simon, M. (2017). Explicating mathematical concept and mathematical conception as theoretical constructs for mathematics education research. *Educational Studies in Mathematics*, *94*, 117–137.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20-26.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema, 14*, 66-91.

Slavícková, M. (2013). Changes in teaching of calculus at the university level. In. Acta *Didactica Universitatis Comenianae, Mathematics*, *13,* 33-45.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM (2013). A formação do professor de matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM. *SBEM, 21*, 1-42.

Stake, R. (2011). *Pesquisa qualitativa: estudando como as coisas funcionam*. Porto Alegre: Penso. (Tradução brasileira da edição original de 2010)

Steffe, L., & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In. R. Lesh, & A. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (p. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Strand, S. (2016). *The intermediate value theorem as a starting point for inquiry – oriented advanced calculus*. PhD in Mathematics Education, Portland State University, USA.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2005). Validation of solutions of construction problems in dynamic geometry environments. *International journal of computers for mathematical learning, 10,* 31–47. doi: 10.1007/s10758-004-6999-x.

Swinyard, C., & Larsen, S. (2012). Coming to understand the formal definition of limit: insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(4), 465-493.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Tall, D. (1993). Students' difficulties in calculus. In *Proceedings of the 7th International Conference in Mathematics Education* – ICME 7 (pp. 13-28). Québec, Canadá.

Tall, D. (2006). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495-511). New York, NY: Macmillan.

Tall, D., & Katz, M. (2014). A cognitive analysis of Cauchy's conceptions of function, continuity, limit, and infinitesimal, with implications for teaching the calculus. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 97-124.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Tall, D., Smith, D., & Piez, C. (2008). Technology and calculus. In M. Kathleen Heid & G. M. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of* Mathematics (pp. 207-258). USA: Information Age Publishing.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13,* 438-445.

Tuckman, B. (2002). *Manual de investigação em educação.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian

Trocki, A., & Hollebrands, K. (2018). The development of a framework for assessing dynamic geometry task quality, *Digital Experiences in Mathematics Education*, 1-29. doi.org/10.1007/s40751-018-0041-8.

Venturini, M., & Sinclair, N. (2017). Designing assessment tasks in a dynamic geometry environment. In A. Leung, & A. Baccaglini-Frank (Eds.), *Digital technologies in designing mathematics education tasks: Potential and pitfalls* (pp. 77-98). Cham: Springer.

Villarreal, M. (1999). *O pensamento matemático de estudantes universitários de cálculo e tecnologias informáticas*. Tese de Doutoramento em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Brasil.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Webb, D., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg: using representations to Support Student Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(2), 110–113.

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for research in mathematics education*, 3(22), 237–251.

Wolcott, H. (2009). *Writing up qualitative research* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: SAGE.

Yorganci, S. (2018). A study on the views of graduate students on the use of geogebra in mathematics teaching. *European Journal of Education Studies, 4*(8), 63-78. doi: 10.5281/zenodo.1272935.

Anexos

Anexo 1 – Objetivos de aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade

1. Objetivos de aprendizagem do limite no ponto (Bressoud et al., 2015; Biza & Zacharides 2010; Juter; 2006; Maurice; 2000; Swinyard & Larsen, 2012)

Objetivos de aprendizagem	Ações verificadas	Categorias de análise utilizadas
Reconhecer o limite no ponto	• Identificar a (in)existência do limite representado algébrica e geometricamente • Interpretar se o limite é alcançado pela função	Significados Representações
Representar o limite no ponto	• Expressar o registo algébrico e geométrico do limite no ponto • Traduzir o limite em suas diferentes representações	Representações Resolução de problemas
Reconhecer a definição formal de limite	• Identificar a (in)existência de limite no ponto em expressão algébrica, assentada na noção de vizinhança que procurava defini-lo	Significados Resolução de problemas
Representar o limite no ponto por sua definição formal	• Expressar o registo do limite no ponto na sua definição formal Traduzir o limite representado geometricamente ou por sua notação simbólica para a sua definição formal	Significados Representações. Resolução de problemas
Reconhecer indeterminação $\frac{0}{0}$ no cálculo de limite	• Identificar que o resultado do cálculo de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \frac{0}{0}$ é indeterminado	Representação
Resolver indeterminação $\frac{0}{0}$ no cálculo algébrico de limite no ponto	• Aplicar técnicas algébricas para resolver $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \frac{0}{0}$	Resolução de problemas
Reconhecer o declive da reta tangente ao gráfico de função	• Identificar que a expressão $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ traduz o declive da reta tangente (m_t) ao gráfico de uma função	Significados Representação
Calcular o declive da reta tangente ao gráfico de uma função	• Aplicar técnicas do cálculo algébrico de limite para resolver $m_t = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	Resolução de problemas

2. Objetivos de aprendizagem do limite infinito (Bressoud et al., 2015; Juter, 2006; Maurice, 2000; Nair, 2010)

Objetivos de aprendizagem	Ações verificadas	Categorias de análise utilizadas
Reconhecer o limite infinito e associá-lo a existência de assíntota vertical.	• Identificar que o resultado $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \frac{k}{0}$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \frac{k}{0}$ determina o limite infinito e associá-lo a existência de assíntota vertical ao gráfico de função • Aplicar técnicas de cálculo de $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \frac{k}{0}$ e $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \frac{k}{0}$ para determinar a expressão que define uma assíntota vertical ao gráfico de uma função	Significados Representação Resolução de problemas
Reconhecer a definição formal de limite infinito	• Identificar a (in)existência de limite infinito em expressão algébrica, assentada na noção de vizinhança, que procurava defini-lo.	Representações Resolução de problemas

3. **Objetivos de aprendizagem do limite no infinito (Bressoud et al., 2015; Maurice, 2000; Nair, 2010)**

Objetivos de aprendizagem	**Ações verificadas**	**Categorias de análise utilizadas**
Reconhecer o limite no infinito e associá-lo a existência de assíntota horizontal.	• Identificar que o resultado $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ determina um limite no infinito e associá-lo a existência de assíntota horizontal. • Aplicar técnicas de cálculo algébrico de $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ para determinar a expressão que define uma assíntota horizontal ao gráfico de função.	Significados Representação Resolução de problemas
Reconhecer a definição formal de limite no infinito	• Identificar a (in)existência de limite infinito em expressão algébrica, assentada na noção de vizinhança que procurava defini-lo.	Representações Resolução de problemas.
Resolver indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$ e $\infty - \infty$ no cálculo algébrico de limite de funções racionais	• Aplicar técnicas algébricas para resolver $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ ou $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty - \infty$ de funções racionais.	Representações Resoluções de problemas

4. **Objetivos de aprendizagem da continuidade (Domingos, 2003; Nair, 2010; Sealey et al., 2014; Strand, 2016)**

Objetivos de aprendizagem	**Ações verificadas**	**Categorias de análise utilizadas**
Reconhecer a continuidade de uma função	• Identificar a (des)continuidade de uma função na análise de seus gráficos.	Significados Representações Resolução de Problemas
Representar a continuidade de uma função.	• Expressar o registo algébrico ou geométrico de funções contínuas. • Traduzir algebricamente uma função contínua, num processo que envolve modelação matemática.	Representações.
Reconhecer a definição formal de continuidade	• Deduzir a continuidade de uma função a partir da definição formal de limite.	Significados Representações
Resolver problemas de aplicação do TVI	• Reconhecer os pressupostos do TVI e aplicá-los na resolução de problemas que o envolve.	Resoluções de problemas.

Anexo 2 – Guião da primeira entrevista

Parte 1: Aspeto sobre o percurso académico.

Objetivo: Perceber mais de perto sobre o interesse profissional do estudante pelo ensino da Matemática; e possíveis influências no seu percurso académico, desse interesse.

1. Descreva o seu percurso na disciplina de Matemática antes da entrada no ensino superior.

2. Você recorda de alguma experiência, relacionada com a Matemática, que tenha lhe marcado enquanto aluno do ensino Fundamental ou Médio? Caso positivo, relate-a.

3. O curso de Licenciatura em Matemática foi a sua primeira escolha? Porque escolheu este curso?

4. Já teve contato com o GeoGebra ou algum software educacional antes? Se afirmativo, qual? Em que condições?

Parte 2: Aspeto relacionado ao ensino e aprendizagem do limite e continuidade.

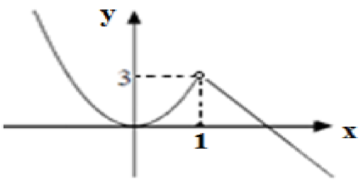
Objetivo: Investigar a compreensão do estudante sobre aspetos do conceito de limite trabalhados até o momento, a partir de questões que estimulem do desenvolvimento de habilidades esperadas num futuro professor, nomeadamente, de reconhecer respostas erradas em resoluções matemáticas e saber explicá-las corretamente; e analisar os erros cometidos por alunos identificando a sua natureza (Albuquerque et al., 2006; Ponte & Chapman, 2008).

Descreva a sua experiência com o trabalho exploratório (resolução de tarefa exploratória integrada ao GeoGebra) realizado no ensino de limite no ponto, destacando os pontos positivos e/ou negativos para a sua aprendizagem e as dificuldades sentidas.

Agora você é o professor! Você deverá corrigir resoluções de alunos em dois problemas, as quais estão descritas a seguir:

Questão 1: Na figura a seguir está apresentado um esboço do gráfico de uma função real g. O que é possível concluir sobre a existência de $\lim_{x \to 1} g(x)$? Justifique sua resposta.

Gráfico da função g



Resposta do aluno:

Quando o limite se aproxima de 1 tanto pela direita e pela esquerda tende a aumentar e atingir o seu ponto máximo 3.

Sim existe o limite. e $\lim_{x \to 1} g(x) = 3$

RESOLVA:

Analise a resposta do aluno e comente em relação ao que você observa de certo e/ou de errado nessa resolução (justificando).

Questão 2: Calcule o valor de $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x}{x - 1}$, justificando sua resposta.

Resposta do aluno:

Como $\lim_{x \to 1} (x^3 - x) = 0$ e $\lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$, então$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x}{x - 1} = \frac{0}{0} = 1.$

Logo concluo que o $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x}{x - 1} = 1.$

RESOLVA:

a) A argumentação do aluno está correta? Justifique sua resposta.

b) E a conclusão do aluno (isto é, o valor do limite), está correta? Justifique sua resposta.

Questão 3: Seja f uma função real. Descreva tudo o que você sabe sobre a seguinte informação:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

Anexo 3 – Guião da segunda entrevista

Parte 1: Aspeto relacionado ao trabalho exploratório desenvolvido em sala de aula

Objetivo: Perceber mais de perto sobre as contribuições do trabalho exploratório realizado em sala de aula e possíveis influências no percurso acadêmico dos estudantes.

1. Descreva a sua experiência com o trabalho exploratório realizado no ensino de limite e continuidade, destacando os pontos positivos e negativos?

2. Relativamente à utilização do GeoGebra nas tarefas quais os aspetos positivos e negativos você pode destacar?

3. No que respeita ao trabalho exploratório e ao uso do GeoGebra, haveria sugestões que gostarias de apresentar?

Parte 2: Aspetos relacionado à aprendizagem do limite e continuidade.

Objetivo: Investigar a compreensão do estudante sobre aspetos do conceito de limite e continuidade, a partir de questões que estimulem o desenvolvimento de habilidades esperadas num professor, nomeadamente, de reconhecer respostas erradas em resoluções matemáticas e saber explicá-las corretamente; e analisar os erros cometidos por alunos identificando a sua natureza (Albuquerque et al., 2006; Ponte & Chapman, 2008).

Agora você é o professor! Você deverá corrigir resoluções de alunos em dois problemas, as quais estão descritas a seguir:

Questão 1

Você está recebendo uma folha com a resolução apresentada por si à questão submetida na primeira entrevista:

Seja f uma função real. Descreva tudo o que você sabe sobre a seguinte informação $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$.

Analise a resolução que você apresentou. A seguir indique o que você manteria, retiraria, corrigiria ou acrescentaria nesta resposta? Justifique.

Questão 2: Para resolver a questão descrita abaixo

> Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por:
>
> $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & se \;\; x < 1 \\ 1 & se \;\; x = 1 \\ x + 1 & se \;\; x > 1 \end{cases}$$
>
> É possível afirmar que a função f é contínua em $x_0 = 1$? Justifique.

um aluno argumentou da seguinte maneira:

Resposta do aluno

> Sim. Como $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x + 1 = 1 + 1 = 2$
> e $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$, temos
> que o limite existe e é 2. $\left(\lim_{x \to 1} f(x) = 2\right)$
> Assim posso afirmar que $f(x)$ é contínua
> em $x_0 = 1$

RESOLVA:

Analise a resposta do aluno e comente em relação ao que você observa de certo e/ou de errado nessa resolução, justificando.

Questão 3: Seja f uma função real. Descreva tudo o que você sabe sobre a seguinte informação:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$$

Anexo 4 – Questionário inicial: perfil da turma de Pré-Cálculo (período letivo 2016/1)

1. Em que ano você concluiu o Ensino Médio?

____
____

2. De que forma você concluiu o Ensino Médio?

(   ) A maior parte ou totalmente em escola pública de ensino regular.
(   ) A maior parte ou totalmente em escola particular de ensino regular.
(   ) Através de certificação pelo ENEM.
(   ) Através da Educação de Jovens e Adultos – EJA.

3. Você trabalha? Quantas horas diárias?

____
____

4. Atua como professor da educação básica? Em qual segmento e disciplina?

____
____

5. Já estudou sobre o conteúdo de limite de funções reais anteriormente? Quando e em quais condições?

____
____

6. Já conhecia ou tinha ouvido falar acerca do software GeoGebra antes? Caso afirmativo, em que contexto?

____
____

7. Por que escolheu estudar no curso de Licenciatura em Matemática do IFRJ?

____
____

8. Após formado(a), pretende seguir a carreira do magistério? Por quê?

____
____

Anexo 5 – Questionário final

Com este questionário, pretendo conhecer a opinião dos alunos sobre a nova metodologia de ensino aprendizagem utilizada (em particular sobre a realização de tarefas exploratória com recurso ao GeoGebra).

Na **Parte I**, para cada uma das seguintes afirmações exprima o seu nível de acordo, assinalando com um **X** o nível que lhe parece adequado:

1 – Discordo totalmente;
2 – Discordo parcialmente;
3 – Não discordo nem concordo;
4 – Concordo parcialmente;
5 – Concordo totalmente

Na parte II, responda cada uma das questões e, caso o espaço não seja suficiente utilize o verso da folha para resposta, indicando o número da questão.

Este questionário é anônimo e não terá qualquer influência na sua classificação. Responda, por favor, com a máxima sinceridade.

Parte I

Nº	Questões	1	2	3	4	5
1	As tarefas exploratórias aplicadas foram adequadas ao conteúdo ensinado.					
2	As indicações dadas pelo professor foram suficientes para a realização das tarefas.					
3	O tempo disponibilizado para a realização das tarefas foi suficiente.					
4	A realização de cada tarefa ajudava-me nas tarefas seguintes.					
5	A realização das tarefas ajudou-me a compreender melhor os conteúdos programáticos da disciplina de Pré-Cálculo					
6	As ideias trabalhadas nas tarefas ajudaram-me a compreender melhor os caminhos a serem tomados para resolver os exercícios propostos.					
7	As explorações realizadas no GeoGebra ajudaram-me na compreensão de conteúdos matemáticos e que não foram totalmente compreendidos anteriormente.					
8	O uso do GeoGebra integrado nas tarefas, tornou-se de suma importância para a minha compreensão dos conteúdos ensinados.					
9	As discussões coletivas, realizadas após a aplicação das tarefas, permitiram esclarecer dúvidas que ainda permaneciam após a realização das tarefas.					
10	Houve uma adequada ponderação entre aulas expositivas, de exercícios e de realização de tarefas					
11	O trabalho desenvolvido com esta nova metodologia foi eficaz em termos da minha aprendizagem					
12	Agrada-me a metodologia de ensino utilizada nesta disciplina					

Parte 2

1. Descreva a sua experiência com o trabalho exploratório realizado no ensino de limite e continuidade, destacando os pontos positivos e negativos?

2. Relativamente à utilização do GeoGebra nas tarefas quais os aspetos positivos e negativos você pode destacar?

3. Quais as aprendizagens mais importantes que considera ter alcançado ou que conhecimentos consolidou com o trabalho realizado?

4. De que modo o trabalho exploratório contribuiu para essas aprendizagens?

5. E o uso do GeoGebra, de que modo ele contribuiu para essas aprendizagens?

6. No que respeita ao trabalho exploratório, haveria alterações que gostarias de sugerir?

7. Para promover as aprendizagens dos seus futuros alunos, você acha que pode utilizar o mesmo tipo de tarefas usadas nesta disciplina (exploratórias com recurso ao GeoGebra)? Porquê?

Anexo 6 – Programa curricular da disciplina de Pré-Cálculo

PLANO DE DISCIPLINA

DISCIPLINA **PRÉ-CÁLCULO**		**CÓDIGO** **MAT121**	
CURSO (S) EM QUE É OFERECIDA		**CLASSIFICAÇÃO**	
		Obrigatória	**Optativa**
• **Licenciatura em Matemática**		**X**	
• **Licenciatura em Física**		**X**	
• **Licenciatura em Química**		**X**	
• **Bacharelado em Química**		**X**	
CARGA HORÁRIA SEMESTRAL (horas) 81	**NÚMERO DE CRÉDITOS** 6	**CARGA HORÁRIA SEMANAL** (tempos de aula) 6	
PRÉ-REQUISITO (S)		**CÓDIGO (S)**	
• Não há		---	

EMENTA
Funções: Definição, domínio, imagem, gráfico. Funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras. Função composta e função inversa. Funções especiais: polinômios, logaritmos e exponenciais, trigonométricas e trigonométricas inversas. Limites: definição, teoremas sobre limites, limites no infinito, limites infinitos, limites fundamentais, formas indeterminadas. Continuidade de funções.

OBJETIVO GERAL
Estabelecer as bases de Matemática Elementar que possibilitem a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

ABORDAGEM	**PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS**
(x) Teórica ( ) Prática	O curso é feito mediante aulas expositivas.

ATIVIDADES DE ENRIQUECIMENTO CURRICULAR--

OPERACIONALIZAÇÃO DA PRÁTICA COMO COMPONENTE CURRICULAR
(Exclusivo para os Cursos de Licenciatura, de acordo com o Parecer CNE/CP nº 28/2001).

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

SAFIER, F. **Pré-Cálculo: Teoria e Problemas**. Coleção Schaum. Ed Bookman, 2003.
LEITHOLD, L. **Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Harbra, 1994.
IEZZI, G.; MURAKAMI, C. e MACHADO, N. J. **Fundamentos de Matemática Elementar: Limites, Derivadas, Noções de Integrais**. São Paulo: Atual Editora, 2005.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

LARSON, R.; HOSTETLER, R.; EDWARDS, B., **Cálculo Diferencial e Integral**. Editora: Mc Graw Hill, 2006.
STEWART, J. **Cálculo**. Vol. 2, São Paulo: Thomson Learning, 2013.
GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
ANTON, H. **Cálculo: um novo horizonte**. Santana: Bookman, 2004.
FOULIS, D. J.; MUNEM, M. A. **Cálculo**. LTC, 1982.

Coordenador do Curso Edgar Manuel Chipana Huamaní	**Pró-Reitoria de Ensino Básico, Técnico e Tecnológico (PROEN)** Alessandra Ciambarella Paulon
Julho / 2018	Julho / 2018

Anexo 7 – Planeamento da experiência de ensino

PLANEJAMENTO DA DISCIPLINA DE PRÉ-CÁLCULO — **PROFESSOR: VILMAR FONSECA**

CURSO: LICENCIATURA EM MATEMÁTICA — **PERÍODO: 2016/1** — **1ª PARTE: ESTUDO DAS FUNÇÕES**

	SEMANA	CONTEÚDO	Nº DE AULAS (45 MIN)	OBJETIVOS	PROCEDIMENTOS OPERACIONAIS.
1º PARTE: ESTUDO DAS FUNÇÕES REAIS.	**1ª semana** 07-11/03	Introdução ao estudo das funções reais • Definição, notações, domínio, imagem, gráfico. • Funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras. • Função composta e função inversa.	3 aulas	✓ Reconhecer e representar a existência de uma função em diferentes representações (verbal, algébrica, geométrica). ✓ Compreensão dos principais elementos de uma função, nomeadamente, domínio, imagem, crescimento e decrescimento, análise gráfica. ✓ Compreender algébrica e geometricamente os critérios de existência de funções composta, injetora, sobrejetora, bijetora e inversa.	Aula expositiva/ participativa e de resolução de exercícios e problemas
			3 aulas		Aula expositiva e resolução de exercícios e problemas
	2ª semana 14-18/03	Introdução ao estudo das funções reais • Função composta e função inversa.	3 aulas	✓ Resolver problemas de aplicação de funções compostas e inversa. ✓ Compreender translação horizontal e vertical de gráficos de uma função. ✓ Revisar funções polinomiais: função afim (zeros, gráfico, inequações), função quadrática (gráficos, concavidade, máximos e mínimos), função cúbica (zeros e gráficos) e funções polinomiais de grau maior que 3 ✓ Técnica de determinação das raízes racionais de uma função polinomial	Aula expositiva/ participativa e de resolução de exercícios e problemas
		Funções especiais I • Função Polinomial (Afim, Quadrática, Cúbica, ...)	3 aulas		Aula expositiva e resolução de exercícios e problemas
	3ª semana 21 a 25/03	Funções especiais I (continuação) • Função Modular • Função Racional	3 aulas	✓ Revisar as principais ideias relacionadas ao estudo da função modular: resolução de equações e inequações e construção de gráficos ✓ Revisar as principais ideias relacionadas ao estudo da função racional: resolução de inequações e construção de gráficos, sobretudo no estudo da família de funções racionais definidas por $f(x) = \frac{k}{x-x_0} + y_0$, $k \in \mathbb{R}^*$.	Aula expositiva/ participativa e de resolução de exercícios e problemas
			3 aulas		Não houve aula (Feriado)
	4ª semana 28/03 a 01/04	Funções especiais II • Função Potência e Raízes.	3 aulas	✓ Revisar as principais ideias relacionadas ao estudo da função potência, $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{R}$ (Domínio, imagem, análise e esboço de gráficos) nas diferentes famílias de funções determinadas pela variação de $k \in \mathbb{R}$. ✓ Aplicar conhecimentos de função quadrática para resolver problemas de maximizar área do retângulo.	Exploração de Tarefa sobre funções e Discussão coletiva
			3 aulas		Aula expositiva/ participativa e de resolução de exercícios e problemas
	5ª semana 4 a 8/04	Funções especiais III • Função Exponencial • Função Logarítmica	3 aulas	✓ Revisar as principais ideias relacionadas ao estudo das funções exponenciais e logarítmicas, nomeadamente: (domínio, imagem, gráficos, equações e inequações exponenciais e logarítmicas. ✓ Resolver problemas modelados por essas funções como: crescimento e decrescimento exponencial, escala Richter, PH de uma substância, etc.	Aula expositiva/ participativa e de resolução de exercícios e problemas
			3 aulas		Aula expositiva e resolução de exercícios e problemas
	6ª semana 11 a 15/04	Funções especiais IV • Funções Trigonométricas (funções: seno, cosseno, tangente, secante, cotangente e cossecante)	3 aulas	✓ Revisar as principais ideias relacionadas à trigonometria do círculo como ângulos e radiano, arcos côngruos, relações trigonométricas no círculo. ✓ Revisar as principais ideias das funções trigonométricas nomeadamente: domínio, imagem, gráficos, equações e inequações trigonométricas e as principais relações fundamentais entre essas funções.	Aula expositiva/ participativa e de resolução de exercícios e problemas
			3 aulas		Aula expositiva e resolução de exercícios e problemas
	7ª semana 18 a 22/04	• Resolução de Exercícios (Aula Extra)	3 aulas	✓ Resolução de exercícios e problemas envolvendo o estudo das principais funções reais	Aula de resolução de exercícios e problemas
			3 aulas		Não houve aula (Feriado)
			3 aulas		Não houve aula (Feriado)

PLANEJAMENTO DA DISCIPLINA DE PRÉ-CÁLCULO **PROFESSOR: VILMAR FONSECA**
CURSO: LICENCIATURA EM MATEMÁTICA **PERÍODO: 2016/1** **2ª PARTE: LIMITE E CONTINUIDADE (Experiência de Ensino)**

	SEMANA	CONTEÚDO	Nº DE AULAS (45 MIN)	OBJETIVOS	PROCEDIMENTOS OPERACIONAIS.
2º PARTE: LIMITE E CONTINUIDADE.	**8ª semana** 25 a 29/04	Aula / Avaliações Introdução ao estudo do limite: Limite no ponto. • Noções intuitivas. • Existência e unicidade do limite	3 aulas 3 aulas	✓ Aplicar os conhecimentos de funções na resolução de problemas. ✓ Introduzir a ideia de limite de uma função num ponto ✓ Reconhecer a existência do limite. ✓ Identificar o comportamento local da função, através da ideia de limites laterais.	Tese sobre o conteúdo de funções. Exploração da Tarefa nº 1: /Discussão coletiva
	9ª semana 02-06/05	Limite no ponto. • Cálculo algébrico • Propriedades e operações de limite • Definição formal Limite Fundamental: • Limite Trigonométrico.	3 aulas 3 aulas 3 aulas	✓ Reconhecer a representação algébrica e geométrica de limite. ✓ Calcular o valor do limite através do uso e manipulação de suas operações (propriedades). ✓ Reconhecer e resolver o caso de indeterminação $\frac{0}{0}$, no cálculo de limite. ✓ Reconhecer e representar, formal e informalmente, a definição de limite. ✓ Compreender o papel dos quantificadores ε e δ, na definição formal de limite no ponto.	Exploração da Tarefa nº 2 /Discussão coletiva Exploração da Tarefa nº 3: /Discussão coletiva Exploração da Tarefa nº 4: /Discussão coletiva
	10ª semana 09 a 13/05	Limite no ponto • Definição Formal Limite infinito • Noções intuitivas • Assíntota vertical.	3 aulas 3 aulas	✓ Compreender o papel dos quantificadores ε e δ na definição formal de limite no ponto. ✓ Reconhecer que o limite é alcançado pela função. ✓ Calcular o valor do limite através do uso de suas operações (propriedades). ✓ Aplicar o Teorema do Sanduíche (Confronto) no cálculo de limite. ✓ Reconhecer algébrica e geometricamente o limite infinito.	Exploração da Tarefa nº 5: e Discussão coletiva Exploração da Tarefas nº 6 e Discussão coletiva
	11ª semana 16 a 20/05	Limite infinito • Cálculo algébrico • Definição formal Limite no infinito • Noções intuitivas • Assíntota horizontal.	3 aulas 3 aulas	✓ Reconhecer e representar assíntota vertical ao gráfico de uma função, a partir do cálculo do limite. ✓ Reconhecer e representar a definição formal de limite infinito. ✓ Reconhecer algébrica e geometricamente o limite infinito. ✓ Reconhecer e representar assíntota horizontal ao gráfico de uma função, a partir na noção de limite no infinito. ✓ Reconhecer a representação algébrica e geométrica do limite no infinito e explicar o seu significado.	Exploração da Tarefa nº 7 e Discussão coletiva e Exploração da Tarefa nº 8 e Discussão coletiva Exploração da Tarefa nº 9 e Discussão coletiva Exploração da Tarefa nº 10 (Parte 1)/Discussão coletiva
	12ª semana 23 a 27/05	Limite no infinito • Cálculo Algébrico. Limite Fundamental: • Limite Exponencial	3 aulas 3 aulas 3 aulas	✓ Reconhecer e representar, geométrica e algebricamente, uma assíntota horizontal ao gráfico de uma função, a partir do cálculo do limite. ✓ Resolver os casos de indeterminações $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty^0, 1^\infty$ e 0^0 no cálculo de limite.	Exploração da Tarefa nº 10 (Parte 2)/Discussão coletiva Não houve aula (Feriado) Não houve aula (Feriado)

2º PARTE: LIMITE E CONTINUIDADE.	**13ª semana** 30/05 a 03/06	Limite no infinito • Definição formal Limite no ponto • Taxa de variação instantânea	3 aulas	✓ Reconhecer e representar a definição formal de limite no infinito. ✓ Compreender o papel dos quantificadores na definição formal de limite no infinito. ✓ Reconhecer que a expressão algébrica do declive da reta tangente ao gráfico de funções é expressa por $m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.	Exploração da Tarefa nº 11 e Discussão coletiva
			3 aulas		Exploração da Tarefa nº 12 e Discussão coletiva
	14ª semana 6 a 10/06	Aula de resolução de exercícios	3 aulas	✓ Aplicar os conhecimentos de limite na resolução de problemas.	Aula resolução de exercícios e problemas
		Avaliação sobre o conceito de limite	3 aulas		Tarefa de Avaliação nº 1
	15ª semana 13 a 17/06	Continuidade • Continuidade local. • Condições de existência de continuidade local. • Tipos de descontinuidades de funções • Continuidade global	3 aulas	✓ Reconhecer os critérios de existência de continuidade local. ✓ Identificar a (des)continuidade de uma função na análise de seus gráficos. ✓ Reconhecer as descontinuidades removíveis e/ou não removíveis. ✓ Reconhecer a existência de continuidade global de funções. ✓ Aplicar conhecimentos da taxa de variação instantânea para resolver problemas de otimização. ✓ Aplicar os conhecimentos de limite para determinar da inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função.	Exploração da Tarefa nº 13 e Discussão coletiva
			3 aulas		Exploração da Tarefa nº 14 e Discussão coletiva
	16ª semana 20 a 24/06	Continuidade • Definição formal de continuidade. • Propriedades da continuidade de funções • Teorema do Valor Intermediário – TVI	3 aulas	✓ Reconhecer e representar a definição formal de continuidade. ✓ Reconhecer os pressupostos de aplicação do TVI. ✓ Mobilizar os conhecimentos sobre o TVI e aplicá-los na resolução de problemas que o envolve.	Exploração da Tarefa nº 15 e Discussão coletiva
			3 aulas		Exploração da Tarefa nº 16 e Discussão coletiva
	17ª semana 27/06 a 01/07	Continuidade • Teorema do Valor Intermediário – TVI	3 aulas	✓ Mobilizar os conhecimentos sobre o TVI e aplicá-los na resolução de problemas que o envolve. ✓ Aplicar os conhecimentos de limite e continuidade estudados na resolução de problemas.	Exploração da Tarefas nº17 e Discussão coletiva
			3 aulas		Aula resolução de exercícios e problemas
	18ª semana 04 a 08/07	Aula de exercícios / Avaliação	3 aulas	✓ Aplicar os conhecimentos de limite e continuidades estudados na resolução de problemas. ✓ Balanço Geral da disciplina.	Tarefa de Avaliação nº 2
			3 aulas		Aplicação do Questionário Final. Balanço final da disciplina
	19ª semana 11 a 15/07	Aula de exercícios / Avaliação	3 aulas	✓ Entrega das médias finais ✓ Balanço geral da disciplina ✓ Avaliação repositiva para o aluno que não fez alguma avaliação ou ficou com média entre 4,0 e 6,0.	Avaliação Final
			3 aulas		Resultado Final e lançamento das notas

Anexo 8 – Pedido de autorização aos alunos

Estimado aluno de Pré-Cálculo (período letivo 2016/1) do curso de Licenciatura em Matemática.

Em setembro de 2014, iniciei como aluno matriculado, a frequência no programa de Doutorado em Educação, especialidade de Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal. O projeto de investigação que estou a desenvolver tem como título "**A aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade: uma experiência de ensino na formação inicial de professores de Matemática, no Brasil**" e o seu objetivo é investigar como se desenvolve a aprendizagem dos futuros professores de matemática, sobre os conceitos de limite e continuidade de funções reais, no decurso de uma experiência de ensino marcada ela integração de tarefas exploratórias e o GeoGebra.

Esta experiência de ensino será realizada em sua turma, e envolve uma combinação de aulas dedicadas à aplicação de tarefas de exploratórias com recurso ao GeoGebra, de aulas com caráter "expositivo participativo" de introdução e formalização de conceitos teóricos e outras aulas, ainda, de resolução de exercícios de consolidação de conhecimentos.

Deste modo, solicito a sua colaboração nesta investigação. A sua participação abrange a respostas aos questionários e a participação nas aulas. Assim, solicito a sua autorização para: (i) utilizar os dados constantes nos questionários, nas tarefas realizadas em sala de aula no âmbito desta investigação; e (ii) proceder com a gravação em áudio e vídeo de todos os momentos citados em (i).

Ressalto, ainda, que as imagens e gravações em áudio resultantes desses momentos, não serão divulgados nem serão utilizados para quaisquer outros fins, a não ser para o trabalho acadêmico, sendo sempre preservado o anonimato dos alunos. Além disso, este trabalho não resultará qualquer prejuízo para os alunos, não havendo lugar a qualquer alteração relativamente aos conteúdos programáticos, nem às indicações metodológicas preconizadas no programa da disciplina de Pré-Cálculo, nem este terá quaisquer repercussões na avaliação dos alunos.

Antecipadamente agradeço pela colaboração de todos vocês neste processo.

Nilópolis, 04 de março de 2016

Vilmar Gomes da Fonseca
Professor efetivo do IFRJ/Nilópolis
Doutorando em Educação (Didática da Matemática)

Universidade de Lisboa/Portugal

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Eu, ____, aluno regularmente matriculado na disciplina de Pré-Cálculo (período letivo 2016/1), do curso de Licenciatura em Matemática do IFRJ/Campus Nilópolis, sob número de matrícula ________________________, confirmo ter tomado conhecimento do objetivo do projeto de investigação intitulado "**A aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade: uma experiência de ensino na formação inicial de professores de Matemática, no Brasil**", que Vilmar Gomes da Fonseca se propõe a desenvolver na minha turma, e autorizo a utilização dos dados recolhidos no âmbito desta investigação.

Nilópolis, 04 de março de 2016

____

Assinatura do aluno

Anexo 9 – Autorizações institucionais

INSTITUTO FEDERAL
RIO DE JANEIRO
Campus Nilópolis

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro
Diretoria Geral

Nilópolis, 20 de junho de 2015.

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DESENVOLVIMENTO DE PESQUISA NA INSTITUIÇÃO

Venho, por meio deste documento, autorizar o pesquisador **"VILMAR GOMES DA FONSECA"**, CPF [redacted], a desenvolver o projeto intitulado "**Formação inicial de professores de matemática: integrando tarefas exploratórias e o Geogebra na aprendizagem de limites**", no Campus "Nilópolis", como parte integrante de sua pesquisa de Tese, do Programa de Doutorado em Educação, especialidade de Didática da Matemática, da Universidade de Lisboa – Portugal. Declaro ainda que o pesquisador supracitado desenvolverá as atividades de pesquisa, no âmbito deste *Campus* do IFRJ, junto às turmas de Pré-Cálculo do Curso de Licenciatura em Matemática, nos próximos 18 meses.

[redacted]

Diretor do IFRJ – *Campus Nilópolis*

[redacted]

Diretor Geral
IFRJ - Campus Nilópolis
[redacted]

IFRJ – Campus Nilópolis
Rua Lúcio Tavares, 1045 – Centro, Nilópolis, RJ. CEP 26530-060
Internet: http://www.ifrj.edu.br/ Tel: (21)2691-1811

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DESENVOLVIMENTO DE PESQUISA NA TURMA DE PRÉ-CÁLCULO

Eu, [redacted], matrícula Siape [redacted], professora da turma de Pré-Cálculo (período letivo 2015/02), do curso de Licenciatura em Matemática, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro/ IFRJ, campus Nilópolis, confirmo ter tomado conhecimento do objetivo do projeto de investigação intitulado "**Formação inicial de professores de matemática: integrando tarefas exploratórias e o Geogebra na aprendizagem de limites**", que o professor Vilmar Gomes da Fonseca, CPF [redacted], se propõe desenvolver, na unidade curricular de Limites de funções reais, e autorizo-o a realizar suas atividades de pesquisa na turma citada.

Nilópolis, 24 de junho de 2015.

[redacted]

Professora do IFRJ – *Campus Nilópolis*

INSTITUTO FEDERAL
RIO DE JANEIRO
Campus Nilópolis

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro
Diretoria Geral

Nilópolis, 03 de março de 2016.

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DESENVOLVIMENTO DE PESQUISA NA INSTITUIÇÃO

Venho por meio deste documento autorizar o pesquisador **VILMAR GOMES DA FONSECA,** CPF [redacted], a desenvolver o projeto de investigação intitulado "**A aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade: uma experiência de ensino na formação inicial de professores de Matemática, no Brasil.**", no Campus Nilópolis, como parte integrante de sua pesquisa de Tese do Curso de Doutoramento em Educação, na especialidade de Didática da Matemática, da Universidade de Lisboa – Portugal.

Declaro ainda que o pesquisador supracitado é professor do quadro efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro –IFRJ, campus Nilópolis e que desenvolverá as atividades de pesquisa no âmbito deste *Campus* do IFRJ, junto à turma de Pré-Cálculo do Curso de Licenciatura em Matemática, no período letivo 2016/1.

[redacted]

Diretor do IFRJ – *Campus Nilópolis*

Wallace Vallory Nunes
Diretor Geral
IFRJ - Campus Nilópolis
Matrícula Siape [redacted]

IFRJ – Campus Nilópolis
Rua Lúcio Tavares, 1045 – Centro, Nilópolis, RJ. CEP 26530-060
Internet: http://www.ifrj.edu.br/ Tel: (21)2691-1811

Anexo 10 – As tarefas exploratórias da experiência de ensino

Tarefa 1: Analisando o comportamento das imagens de uma função

Dada uma função real $f: D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do domínio D_f de f, estamos interessados em saber o que acontece com os valores das imagems $f(x)$ quando x se tende a x_0.

Abra a pasta "Tarefa 01" que contém quatro arquivos. Cada arquivo contém um cenário construído a partir do GeoGebra. Em cada cenário é apresentado o gráfico de uma função real f. Para facilitar a identificação vamos nomear a função do primeiro cenário de f_1, a do segundo cenário de f_2, e assim por diante até a função f_4 do último cenário. Não exite em revê-las quando necessário. A partir dessas considerações responda os itens a seguir:

1. Com relação a função f_1, explique o que acontece com os valores de $f_1(x)$ quando x tende para $x_0 = 2$? Analisa os casos em que $x > 2$ e $x < 2$.

2. O $\lim_{x \to 2} f_1(x)$ existe? Justifique a sua resposta e, caso o limite exista, determine o seu valor.

3. Para cada uma das funções f_1, f_2, f_3 e f_4, contidas nos arquivos, volte a responder às duas questões anteriores.

4. Com base no trabalho realizado nas questões anteriores, conclua sobre quais são as condições que garantem a existência de limite de uma função num ponto?

5. Explique como é que pode identificar essas condições numa representação geométrica.

Tarefa 2: Consolidação da existência de limite num ponto.

Seja f uma função real. Considere a seguinte informação:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1$$

1. O que essa informação significa para você?

2. Represente geometricamente essa informação.

Para resolver a questão:

Analisa o comportamento da função $f(x) = \begin{cases} x+1 & se \quad x \neq 3 \\ 2 & se \quad x = 3 \end{cases}$ em torno de $x_0 = 3$ e verifique e decida sobre a existência do $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

um aluno argumentou da seguinte forma:

À medida que x se aproxima de $x_0 = 3$, os valores de $f(x)$ se aproximam de $y = 4$. Como a função no ponto $x_0 = 3$ assume o valor 2, isto é, $f(3) = 2$, temos, portanto, que não existe o $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

3. Comente a análise desse aluno sobre o comportamento da função f em torno do ponto $x_0 = 3$, indicando se a mesma está correta. Justifique, inclusive realizando os cálculos.

4. A conclusão do aluno "não existe o $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$" está correta? Justifique.

Tarefa 3: $\frac{0}{0}$! Que fração é essa?

PARTE 1

Abra o arquivo "Que fração é essa" que contém uma cena desenvolvida a partir do GeoGebra. Nesta cena está apresentado o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. Repare que o ponto P pertence ao gráfico dessa função e tem coordenadas $(x, f(x))$.

Clique sobre o ponto x e arraste-o em direção a $x_0 = 2$. Faça o ponto x se aproximar de $x_0 = 2$ pela esquerda e pela direita e observe o comportamento das imagens $f(x)$ da função f. A partir dessas informações responda os itens a seguir:

1. Porque a imagem $f(2)$ não aparece no gráfico?

2. Analise o comportamento da função f quando x tende a $x_0 = 2$ e responda: O $\lim_{x \to 2} f(x)$existe? Justifique a sua resposta e, caso o limite exista, determine o seu valor.

3. Caso exista, esse limite é alcançado pela função? Justifique.

PARTE 2

Considerando a função $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ apresentada anteriormente e resolva os itens a seguir:

4. Calcule o valor do $\lim_{x \to 2} f(x)$ por meio de procedimentos algébricos. Que conclusão você pode retirar deste resultado? Marque a opção a seguir que melhor descreve a sua resposta, justificando sua escolha.

   ( ) o limite não existe.
   ( ) o limite é igual a zero.
   ( ) o limite é igual a 1.
   ( ) não é possível determinar.

5. Usando o método de fatoração de expressões algébricas, apresente uma fatoração para a expressão analítica da função f.

6. O que é possível observar nessa expressão analítica fatorada de f, que se configura como fator determinante no resultado do $\lim_{x \to 2} f(x)$, obtido na questão 4? Justifique.

7. Simplifique a expressão analítica fatorada de f que você indicou na questão 5, e calcule o valor $\lim_{x \to 2} f(x)$. Verifique se o resultado obtido é o mesmo do limite que você indicou na questão 2 através da análise do comportamento da função no ponto $x_0 = 2$.

8. Com base no trabalho realizado nas questões anteriores, qual é o procedimento a ser adotado no cálculo do limite de uma função racional no ponto, quando o resultado obtido por procedimentos algébricos corresponder a simbologia $\frac{0}{0}$?

Tarefa 4: Definição formal de limite no ponto

Abra o arquivo “DefLimPoint”. Neste arquivo está apresentado um cenário com a representação geométrica do $\lim_{x \to 2} 2x + 4$. Clique no botão “Animação Limite”. Em seguida clique na setinha  (no canto inferior esquerdo) para iniciar a animação sobre a noção intuitiva do limite L.

Essa noção intuitiva de limite, baseada na ideia de aproximação, pode ser ainda representada por meio da noção de vizinhança, tomando-se intervalos cada vez menores cujos centros são $x_0 = 2$ e $L = 8$. Para melhor compreender essa ideia resolva as questões a seguir.

1. Esboce o gráfico da função $f(x) = 2x + 4$, na figura 1 a seguir. Esta figura deverá ser usada como apoio à resolução de algumas questões, conforme se segue, e para o registo de possíveis conclusões suas.

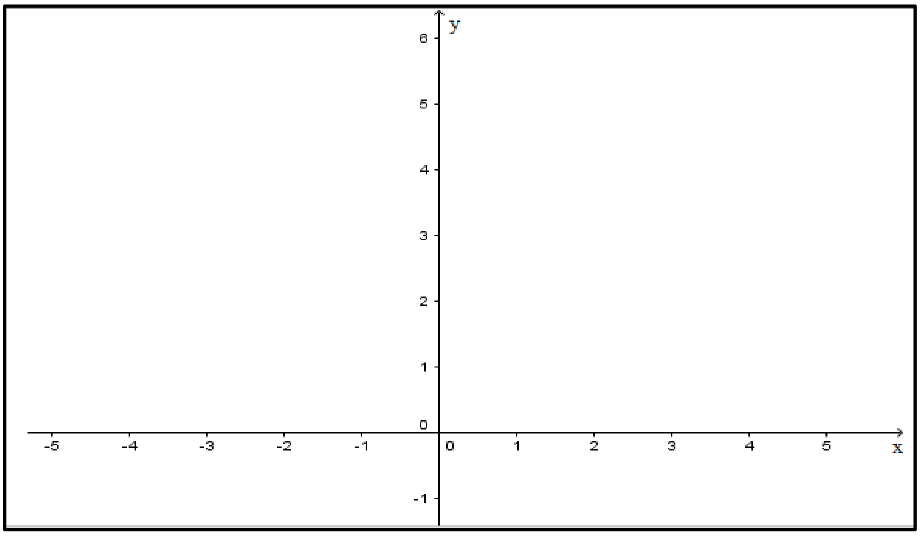


Figura 1

2. Considere um número real positivo $\varepsilon = 0{,}5$. Qual vizinhança de $L = 8$ com raio ε é possível obter (em símbolos $V_\varepsilon(L)$)? Representa por meio de um intervalo numérico da reta real a referida vizinhança.

Represente, na figura 1, a vizinhança $V_\varepsilon(L)$ obtida na questão anterior. Observe que os valores de $f(x)$, que pertencem a $V_\varepsilon(L)$, são imagens de pontos x contidos num intervalo do domínio da função f. Faça as anotações que julgar necessário e responda as questões a seguir.

3. Quais são os pontos x do domínio da função f cujas imagens correspondem aos extremos da vizinhança $V_\varepsilon(L)$?

4. Que intervalo é determinado por esses pontos x? Esse intervalo é aberto ou fechado? Justifique suas repostas e represente-o na figura 1.

5. Qual é o ponto médio do intervalo que você representou na questão anterior?

6. A partir das ideias trabalhadas nas questões anteriores que conclusão você pode chegar sobre o intervalo determinado na questão 4) e o ponto x_0? Justifique.

7. Representando pela letra δ o raio da vizinhança de $x_0 = 2$, simbolizada por $V_\delta(x_0)$, determine o valor de δ?

8. É possível determinar alguma relação matemática entre ε (o raio de $V_\varepsilon(L)$) e δ (raio de $V_\delta(x_0)$). Caso seja possível, qual seria essa relação?

9. A tabela a seguir contém alguns valores de ε cada vez mais próximo de zero. A partir das ideias trabalhadas anteriormente, para cada valor de ε dado, complete a tabela com ***i)*** a representação por meio de intervalos das vizinhanças $V_\varepsilon(8)$ e $V_\delta(2)$, ***ii)*** o valor de δ correspondente e ***iii)*** a relação matemática existente entre ε e δ. Além disso, represente suas respostas na figura 1.

Valor de ε	Vizinhança $V_\varepsilon(8)$	Valor de δ	Vizinhança $V_\delta(2)$	Relação entre ε e δ
0,5				
0,2				
0,1				
0,01				

10. Essa relação entre ε e δ é a mesma para todos os valores de ε considerado?

Volte ao cenário do arquivo "DefLimPoint" e clique na caixinha "Definição Formal". Observe que é exibido no cenário o seletor ε. Este seletor marca os valores do número real positivo arbitrário, próximo de zero, conforme trabalhado nas questões anteriores. Clique sobre ele e arraste-o para a direita e esquerda, aumentando e diminuindo-o e observe, dinamicamente, o comportamento das vizinhanças $V_\varepsilon(L)$ e $V_\delta(x_0)$.

11. Fixe o seletor ε de forma que se tenha $\varepsilon = 0{,}5$. Clique no ponto x e faça-o pertencer ao intervalo $]2-\delta, 2+\delta[$ ou seja, $x \in V_\delta(2)$. O que acontece com os valores de $f(x)$ a medida que $x \in V_\delta(2)$? Faça o mesmo para outros valores de ε. Essa conclusão é a mesma para todos os valores de ε?

12. A partir das ideias trabalhadas nas questões anteriores apresente uma definição do $\lim\limits_{x\to 2} 2x+4$, tomando como base as ideias de vizinhanças $V_\varepsilon(8)$ e $V_\delta(2)$.

Tarefa 5: O limite da minha vizinhança!

PARTE 1

Considere uma função real $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sobre a qual se sabe que:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que se } x \in D \text{ e } |x-2| < \delta \text{ então } |f(x) - 4| < \varepsilon$$

Responda:

1. Explique o significado da expressão anterior.

2. Como você poderia representá-la simbolicamente? E geometricamente?

PARTE 2

Abra o arquivo "Deform". Nesta cena está apresentado o gráfico da função f. Clique na caixinha "valor de ε" para exibir o seletor ε que corresponde aos valores de um número real positivo arbitrário, próximo de zero. Clique sobre ele e arraste-o para a direita e esquerda, aumentando e diminuindo-o.

Observe no cenário que para cada valor de ε existe um número real correspondente δ, positivo e próximo de zero, de modo que o intervalo[18] $]2-\delta, 2+\delta[$ está relacionado com o intervalo[19] $]4-\varepsilon, 4+\varepsilon[$ pela função f. Além disso, diminuindo ou aumentando o valor de ε, o valor de δ também diminui ou aumenta, respectivamente. Experimente realizar algumas dessas modificações para ε. A seguir responda as questões 1, 2 e 3.

3. Faça x se aproximar de $x_0 = 2$, isto é, x pertencer ao intervalo $]2-\delta, 2+\delta[$ (em símbolos $V_\delta(2)$). O que acontece com os valores das imagens $f(x)$ quando os valores de $x \in V_\delta(2)$?

4. Experimente modificar o valor de ε, diminuindo-o. Para cada modificação de ε faça $x \in V_\delta(2)$. À medida que o valor de ε fica cada vez mais próximo de zero e os valores de $x \in V_\delta(2)$, o que acontece com as imagens $f(x)$?

5. Nestas condições, o $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existe? Caso exista, qual é o seu valor? Justifique sua resposta.

6. Caso exista, este limite é alcançado (atingido) pela função f? Justifique.

---

[18] O intervalo $]2-\delta, 2+\delta[$ é chamada de vizinhança de $x_0 = 2$ (em símbolos $V_\delta(x_0)$).

[19] O intervalo $]4-\varepsilon,\ 4+\varepsilon[$ é chamada de vizinhança de $L = 4$, (em símbolos $V_\varepsilon(L)$).

Tarefa 6: Limite infinito e assíntota vertical

Abra a pasta 'Tarefa 6' que contém três arquivos AV1, AV2 e AV3. Cada arquivo contém um cenário construído a partir do GeoGebra com a representação gráfica de uma função real. Para facilitar a identificação vamos nomear a função do primeiro cenário de f_1, a do segundo cenário de f_2, e de f_3 a função do terceiro cenário. Não hesite em revê-las sempre que necessário. Repare que em cada cenário, o ponto P pertence ao gráfico da referida função e tem coordenadas $(x, f(x))$. Clique sobre o ponto x, arraste-o, fazendo-o aproximar-se de $x_0 = 1$. A partir destas considerações, responda às questões seguintes.

1. Analise o comportamento da função f_1, quando x se aproxima de $x_0 = 1$, tanto por valores superiores $(x > 1)$ como por valores inferiores $(x < 1)$. Com base na análise realizada, responda aos itens 1.1 a 1.5:

1.1. Explique o que acontece com os valores das imagens $f_1(x)$ quando x se aproxima de $x_0 = 1$ por valores superiores $(x > 1)$. É possível determinar um valor numérico para o referido limite lateral? Justifique.

1.2. E quando x se aproxima de $x_0 = 1$ por valores inferiores $(x < 1)$, o que acontece com os valores de $f_1(x)$? É possível determinar um valor numérico para o referido limite lateral? Justifique.

1.3. Agora clique no botão **"reta vertical"**. É apresentado o gráfico de uma reta r, perpendicular em relação ao eixo Ox, passando pelo ponto de abscissa 1. Escreva a expressão analítica (equação) dessa reta vertical?

1.4. Observe o comportamento do gráfico da função f_1 em relação à reta r, quando x se aproxima de $x_0 = 1$ por valores superiores e conclua sobre o valor do respetivo limite lateral. Que conclusão é possível chegar sobre a relação entre o gráfico de f_1, a reta r e o respetivo limite lateral?

1.5. Responda ao item anterior considerando o caso em que x se aproxima de $x_0 = 1$ por valores inferiores.

2. Para cada uma das funções f_1, f_2 e f_3, contidas nos arquivos, volte a responder aos itens da questão 1, descritos anteriormente.

OBSERVAÇÃO

As retas verticais apresentadas nos cenários são chamadas Assíntotas Verticais ao gráfico da função no ponto x_0.

3. Com base no trabalho realizado nas questões anteriores, explique o que entende por reta Assíntota Vertical ao gráfico de uma função f no ponto x_0.

4. Como poderá representar, através de uma expressão simbólica, a condição que deve ser satisfeita para que uma função f tenha uma Assíntota Vertical no ponto x_0?

5. Escreva a expressão analítica da reta Assíntota Vertical ao gráfico da função no ponto x_0?

Tarefa 7: Regra de determinação de uma Assíntota Vertical

Considere a função racional $f: D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x+1}{x^3-7x^2+15x-9}$.

1. Calcule os valores de $\lim_{x\to 1} f(x)$ e $\lim_{x\to 3} f(x)$. Comente os resultados obtidos.

Abra o arquivo "FUNRAC" que contém um cenário desenvolvido a partir do GeoGebra. Neste cenário está apresentado o gráfico da função $f(x) = \frac{x+1}{x^3-7x^2+15x-9}$. Repare que o ponto P pertence ao gráfico dessa função e tem coordenadas $(x, f(x))$.

Clique sobre o ponto de abscissa x e arraste-o em direção a $x_0 = 1$ e $x_1 = 3$. Faça o ponto x se aproximar de $x_0 = 1$ e $x_1 = 3$ por valores superiores e inferiores aos dois pontos e observe o comportamento da função, ou seja, os valores das imagens $f(x)$. A partir dessas informações responda os itens a seguir:

2. Determine os limites laterais $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 3^+} f(x)$.

O que estes limites laterais determinam geometricamente?

3. Nestas condições, o que pode concluir sobre a existência de $\lim_{x\to 1} f(x)$? E sobre $\lim_{x\to 3} f(x)$? Justifique sua resposta.

Clique no botão "reta vertical", observe o comportamento do gráfico da função f e, com base no trabalho realizado nas questões anteriores, responda às questões a seguir:

4. Considerando $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ uma função racional, o que se pode concluir sobre a existência $\lim_{x\to x_0} f(x)$ quando, ao aplicar procedimentos algébricos para calculá-lo, obtiver como resultado $\frac{k}{0}$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ $\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{k}{0}\right)$?

5. O que é possível garantir geometricamente, em relação à função, como consequência desse limite?

6. Q_6T_7: Quais seriam as possíveis representações geométricas de $\lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{k}{0}$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$?

Tarefa 8: Definição formal de limite no ponto

1. Na figura a seguir está representado geometricamente o $\lim_{x \to 2} f(x)$.

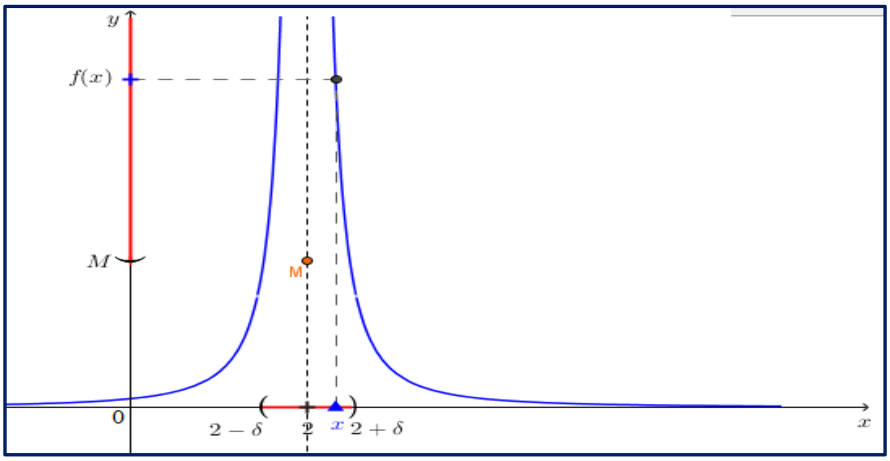


Figura: Representação geométrica de $\lim_{x \to 2} f(x)$

Em qual das alternativas a seguir se apresenta a definição formal de $\lim_{x \to 2} f(x)$? Justifique o porquê de sua escolha.

a) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $|x - 2| < \delta$ então $|f(x) - 2| > \varepsilon$
b) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $|x - 2| < \delta$ então $|f(x) - M| < \varepsilon$
c) $\forall\, M > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $|x - 2| < \delta$ então $f(x) > M$
d) $\forall\, M > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $|x - 2| < \delta$ então $f(x) < M$

2. Considere as três afirmações seguintes:

(1) Definição formal de $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$
(2) Definição formal de $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$
(3) Não corresponde à definição formal de nenhum dos limites anteriores.

Associe a cada expressão abaixo uma das afirmações anteriores, justificando as suas respostas.

a) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $|x - 1| < \delta$ então $|f(x) - 2| < \varepsilon$
b) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $|x - 1| < \delta$ então $|f(x) - 2| > \varepsilon$
c) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $|x - 1| < \varepsilon$ então $|f(x) - 2| < \delta$
d) $\forall\, M > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $|x - 1| < \delta$ então $|f(x) - 2| < M$
e) $\forall\, A > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $|x - 1| < \delta$ então $f(x) < A$
f) $\forall\, A < 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $|x - 1| < \delta$ então $f(x) < A$

Tarefa 9: Reconhecendo o limite de uma função no infinito

Abra a pasta "Tarefa 9" que contém três arquivos AH1, AH2 e AH3. Cada arquivo contém um cenário construído a partir do GeoGebra com a representação gráfica de uma função real f. Para facilitar a identificação vamos nomear a função do primeiro cenário de f_1, a do segundo cenário de f_2, e de f_3 a função do terceiro cenário. Não hesite em revê-las sempre que necessário. Repare que em cada cenário, o ponto P pertence ao gráfico da referida função e tem coordenadas $(x, f(x))$. Clique sobre o ponto x, arraste-o de forma que x cresça infinitamente em valores positivos (simbolicamente $x \to \infty$) e decrescer infinitamente em valores negativos (simbolicamente $x \to -\infty$). A partir destas considerações, responda às questões seguintes.

1. Analise o comportamento da função f_1 fazendo x crescer infinitamente em valores positivos (simbolicamente, $x \to \infty$) e decrescer infinitamente em valores negativos (simbolicamente, $x \to -\infty$). Com base na análise realizada, responda aos itens 1.1 a 1.7:

1.1. Descreva o que acontece aos valores das imagens $f_1(x)$ da função f_1 quando x cresce infinitamente em valores positivos?

1.2. Existe algum valor numérico do qual $f_1(x)$ está a aproximar-se? Caso exista, que valor é esse? Justifique.

1.3. Considere agora o caso em que x decresce infinitamente em valores negativos. Descreva o comportamento das imagens $f_1(x)$ função $f_1(x)$.

1.4. Existe algum valor numérico do qual $f_1(x)$ está a aproximar-se? Caso exista, que valor é esse? Justifique.

1.5. Como poderá representar, por meio de uma expressão simbólica, o comportamento do gráfico da função f_1 quando $x \to \infty$ e $x \to -\infty$.

1.6. Agora clique no botão **"reta horizontal"**. É apresentado o gráfico de uma reta paralela ao eixo Ox, passando por um ponto cuja ordenada é 3. Escreva a expressão analítica dessa reta horizontal.

1.7. Observe o comportamento do gráfico da função f_1 em relação a reta horizontal, quando $x \to \infty$ e o respetivo limite no infinito. Que conclusão é possível chegar sobre o limite da função no infinito? Faça o mesmo para o caso em que $x \to \infty$.

2. Para cada uma das funções f_2 e f_3 contidas nos arquivos, volte a responder aos itens da questão 1 apresentadas anteriormente.

OBSERVAÇÃO

As retas horizontais apresentadas nos cenários são chamadas Assíntotas Horizontais ao gráfico da função.

3. Com base no trabalho realizado nas questões anteriores, explique o que entende por reta Assíntota Horizontal ao gráfico de uma função f?

4. Como poderá representar, através de uma expressão simbólica, as condições que devem ser satisfeitas para que uma função f tenha uma Assíntota Horizontal?

5. Quais seriam as possíveis representações geométricas das condições identificadas na questão anterior?

6. Escreva a expressão analítica da Assíntota Horizontal?

7. Observe, no cenário da função $f_2(x) = 1 + \frac{sen(x)}{x}$, que o gráfico de uma função pode cruzar a assíntota horizontal, infinitas vezes. O mesmo pode ocorrer com uma assíntota vertical? Porquê?

Tarefa 10: Cálculo de limite no infinito

PARTE 1

Abra o arquivo “FUNCPOT” que contém um cenário desenvolvido a partir do GeoGebra, onde está apresentado o gráfico da família funções $f_n(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$ separado em duas telas. Na tela da esquerda está representado o gráfico de $f_n(x) = x^n$ para n par e na tela da direita o gráfico de $f_n(x) = x^n$ para n ímpar. Repare que em cada tela, o ponto P pertence ao gráfico da referida função e tem coordenadas $(x, f(x))$. A partir dessas informações responda as questões 1 a 2, seguintes:

1. Na tela da esquerda clique no seletor n_{par} para visualizar o gráfico das funções $f_2(x) = x^2,\ f_4(x) = x^4,\ f_6(x) = x^6,\ \ldots\ ,\ f_{2k}(x) = x^{2k},\ k \in \mathbb{N}$. Caso seja necessário ajuste o zoom da tela para uma melhor visualização do gráfico das funções f_n. Clique no ponto de abscissa x, arraste-o horizontalmente nas duas direções e observe o comportamento da função $f_n(x) = x^n$ quando $x \to \infty$ e $x \to -\infty$. O que pode conjeturar sobre o $\lim\limits_{x\to\infty} x^n$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n$?
2. De forma semelhante, na tela da direita clique no seletor n_{impar} para visualizar o gráfico das funções $f_1(x) = x$, $f_3(x) = x^3$, $f_5(x) = x^5$, ... , $f_{2k+1}(x) = x^{2k+1}\ k \in \mathbb{N}$. Clique no ponto x, arraste-o em horizontalmente e observe o comportamento da função $f_n(x) = x^n$ quando $x \to \infty$ e $x \to -\infty$. O que você pode conjeturar sobre o $\lim\limits_{x\to\infty} x^n$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n$?
3. A partir das conclusões obtidas nas questões anteriores, apresente uma conjectura sobre o valor de $\lim\limits_{x\to\infty} x^n$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n$.

PARTE 2

Agora abra o arquivo “FUNCPOT2. Neste cenário está apresentado a representação gráfica de uma função polinomial (tela da esquerda), em conjunto com seu monômio de maior grau (tela da direita), nomeadamente as funções f e g definidas por $f(x) = 2x^{10} + 3x^9 - 7x^4$ e $g(x) = 2x^{10}$. Utilize-o para analisar o comportamento dessas funções no infinito, isto é, analisando o que acontece com os valores das imagens $f(x)$ e $g(x)$ quando $x \to \infty$ e $x \to -\infty$. Caso seja necessário ajuste o zoom da tela para uma melhor visualização do gráfico das funções f e g. A partir dessa análise responda às questões seguintes:

4. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$?
5. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$?

6. Existe alguma relação entre os limites $f(x)$ e $g(x)$ no infinito? Analise os casos em que $x \to \infty$ e $x \to -\infty$.

Teste suas conclusões para outras funções polinomiais e seu respectivo monômio de maior grau (função potência), nomeadamente, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e $g(x) = a_n x^n$, $a_n \neq 0$. Para isso, altere a expressão analítica das funções f e g, no cenário do GeoGebra e analise o comportamento dessas funções, quando $x \to \infty$ e $x \to -\infty$. (Caso tenha dificuldade de converter, em comandos do GeoGebra, expressão analítica das funções consideradas, peça orientação ao professor). A seguir, responda às seguintes questões:

7. Que relação é possível obter sobre o $\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e $\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$? Justifique.

8. Com base na conclusão da questão anterior determine os valores $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ onde:

a) $f(x) = 2x^6 - x^4 - x^2 + 5$ e $g(x) = 2x^6 - 3x^2 + 4$.
b) $f(x) = 2x^7 - 5x^5 + 2x^4 + x^2 - 2$ e $g(x) = 2x^5 + x^2 - 1$.
c) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 5$ e $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 4$.

Justifique seus resultados.

9. A partir das conclusões obtidas nas questões anteriores o que podes dizer sobre $\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$, onde, com $a_n, b_n \neq 0$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ e $i \in \mathbb{N}$, quando:

a) $n > m$
b) $n = m$
c) $n < m$

Justifique suas respostas.

10. Apresente uma conjectura sobre $\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$ onde $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, com $a_n, b_n \neq 0$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ e $i \in \mathbb{N}$, são polinômios.

11. Por meio de procedimentos algébricos, apresente uma demonstração da conjectura que você apresentou no item anterior. (Sugestão: em cada polinômio, colocar em evidência o monômio de maior grau).

Tarefa 11: Definição formal de limite no infinito.

Abra o arquivo “DEFINF”. Neste arquivo está apresentado um cenário com a representação gráfica de uma função $f(x) = \frac{1}{x}$. Repare que o ponto P pertence ao seu gráfico dessa função e tem coordenadas $(x, f(x))$.

1. Clique sobre o ponto x e arraste-o horizontalmente fazendo $x \to \infty$ e, e analise o comportamento das imagens $f(x)$ da função. O que é possível concluir sobre o limite $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$?

Essa noção intuitiva de limite no infinito pode ficar mais precisa, utilizando a linguagem algébrica. A fim de tornar mais clara essa afirmação, clique no botão “Def Formal”. É exibido no cenário o seletor ε que marca valores de um número real positivo arbitrário, tão pequeno quanto se deseja, próximo de zero. Além disso, está representada sobre o eixo das ordenadas (Oy) a vizinhança de $L = 0$, de raio ε.

2. Clique sobre o seletor ε e arraste-o horizontalmente, de forma que seja fixado em $\varepsilon = 0{,}5$. Que vizinhança de $L = 0$ com raio ε é possível obter (em símbolos $V_\varepsilon(0)$)? Represente-a por meio de um intervalo.

3. Observe, no cenário, que os extremos dessa vizinhança $V_\varepsilon(0)$ são imagens de pontos x do domínio da função $f(x) = \frac{1}{x}$. Que pontos são esses? Determine-os, identificando por $A > 0$ e $B < 0$.

4. Clique sobre o ponto x e arraste-o horizontalmente fazendo variar $x > A$ e observe os valores das imagens $f(x)$. O que pode concluir sobre as imagens $f(x)$, quando $x > A$?

5. Experimente modificar o valor de ε, diminuindo-o. Observe que para cada valor de ε considerado, um novo valor de $A > 0$ é exibido. Determine os valores de A em função de ε.

6. Para cada modificação em ε faça variar $x > A$. À medida que o valor de ε fica mais próximo de zero e os valores de x crescem infinitamente ($x > A$), que conclusão é possível chegar sobre as imagens $f(x)$? Essa conclusão é a mesma para cada todos os valores de ε? O que essa conclusão significa?

7. A partir das ideias trabalhadas nas questões anteriores, escreva uma definição formal para o conceito matemático apresentado na questão 6?

Tarefa 12 Aproximando-se da reta tangente!

Abra o arquivo "RT1" que contém um cenário desenvolvido a partir do GeoGebra. Neste cenário está apresentado o gráfico de uma função f, a reta t, tangente ao gráfico passando pelo ponto P e uma reta s, secante ao gráfico de f, passando pelos pontos P e Q que pertencem à função f. O ponto P tem coordenadas $P(x_0, f(x_0))$ e h mede a distância horizontal entre P e Q.

- Clique no botão "Pela direita". Observe que é ativada a animação que faz o ponto Q se aproximar do ponto P pela direita, isto é, para valores de $x_Q > x_0$. Observe o que acontece com as retas t, s e com o comprimento h.

- Clique no botão "Pela esquerda" e observe a animação que faz o ponto Q se aproximar do ponto P pela esquerda, isto é, para valores de $x_Q < x_0$. Observe o que acontece com as retas t, s e com o comprimento h.

Obs: Você tem a opção de ativar, de forma manual, a animação apresentada na cena "RT1". Para isso, abra a cena "RT2" e clique sobre o ponto x e arraste-o em direção a x_0. Faça o ponto x se aproximar de x_0 pela esquerda e pela direita e observe o que acontece com as retas t, s e com o comprimento de h.

A partir dessas observações responda as questões propostas a seguir.

1. O que acontece com a reta secante s, a medida que o ponto Q se aproxima do ponto P, seja pela direita ou pela esquerda?

2. Nessas condições, ao comparar as inclinações m_s (retas secantes) e m_t (reta tangente) o que é possível concluir?

3. Para que o ponto Q se torne cada vez mais próximo de P, o que deve acontecer com o valor de h?

4. Determine a expressão das coordenadas do ponto Q, em função de x_0 e h.

Considerando que a inclinação m de uma reta, que passa por dois pontos $A(x_1, f(x_1))$ e $B(x_2, f(x_2))$ é calculada pela expressão $m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, responda as demais questões:

5. Escreva uma expressão algébrica que represente a inclinação da reta secante s, apresentada nessa cena, em função de x_0 e h?

6. Escreva uma expressão algébrica (em função de x_0 e h) que represente o valor do declive (inclinação) da reta tangente ao gráfico da função f, no ponto x_0? Explique porque é que essa expressão realmente atende ao que é pedido nesta questão.

7. Quando esse valor existe, o declive da reta tangente é alcançado (atingido) pela aproximação dos declives das retas secantes? Porquê?

8. Como é possível obter o valor do declive (inclinação) da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 2$? Qual seria o valor dessa inclinação?

Tarefa 11: Reconhecendo a continuidade de uma função num ponto.

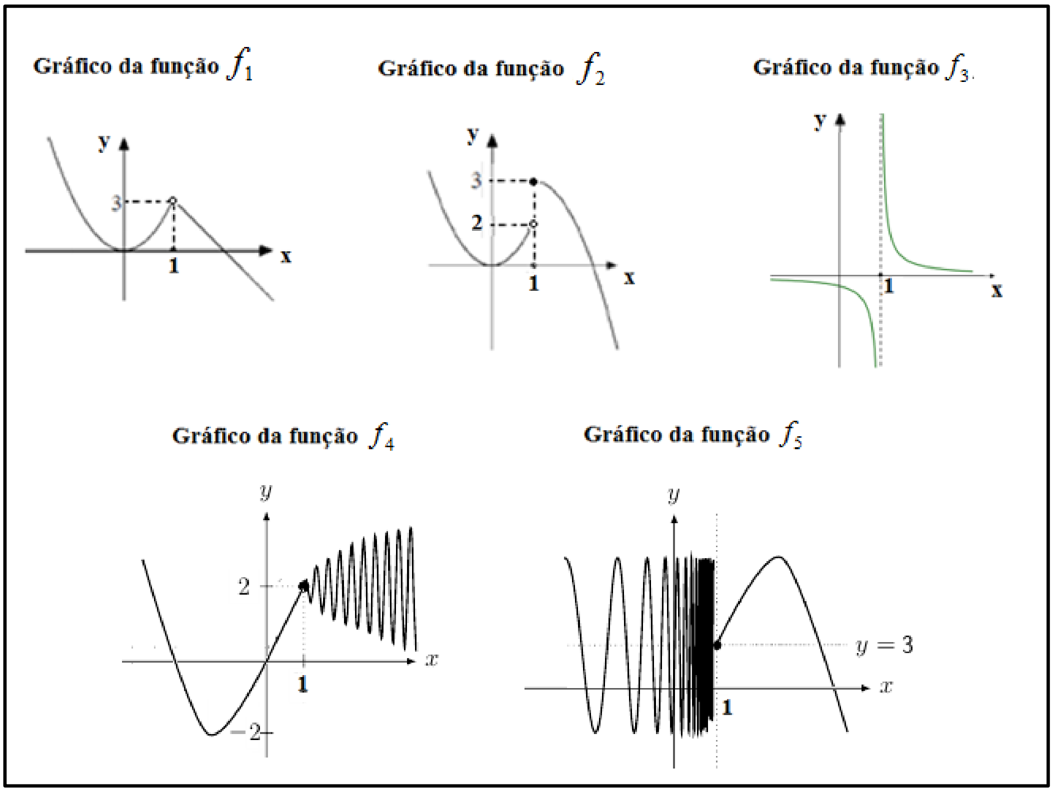
Parte 1: Conceção de continuidade.

1. Apresente um esboço do gráfico de uma função que seja contínua.

2. Justifique o porquê desse gráfico ser a representação de uma função contínua.

Parte 2: Condição de existência da continuidade de uma função no ponto.

Na figura seguinte está apresentado o esboço do gráfico de cinco funções reais nomeadamente, f_1, f_2, f_3, f_4 e f_5.



3. Analisando cada um destes gráficos, indique se a respetiva função é continua ou não, justificando.

Abra o arquivo "Função Contínua" que contém um cenário desenvolvido a partir do GeoGebra. Nesse cenário está apresentado o gráfico de uma função real f_k definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + kx + 2 & se \quad x < 2 \\ 2x + 3 & se \quad x < 2 \\ A & se \quad x = 2 \end{cases}$$ tomando inicialmente $k = -1$.

Este cenário contém dois seletores, nomeadamente, o “Seletor k” que indica os valores do parâmetro k, presente na expressão analítica da função f_k, e a “imagem $f_k(2)$” que indica os possíveis valores da imagem $A = f_k(2)$. Clique sobre cada seletor e arraste-o para direita e para a esquerda, aumentando e diminuindo o seu valor. Observe as modificações que ocorrem no gráfico da função f_k em torno de $x_0 = 2$. A partir dessas considerações responda as questões seguintes:

4. A função f_k representada inicialmente, tomando $k = -1$ é contínua? Por quê? Caso não seja, qual é o ponto de abscissa x que origina essa descontinuidade?

5. Através de diversas explorações realizadas no cenário, encontre o valor de k, de modo que o gráfico da função f_k apresente continuidade do comportamento em torno de $x_0 = 2$, isto é, mesmo comportamento lateral para os valores de x em torno de $x_0 = 2$ (para $x < 2$ e $x > 2$). Que valor(es) de k você encontrou?

6. O que é necessário para garantir a continuidade desse comportamento em torno de $x_0 = 2$? Isso é suficiente para que a função seja contínua em $x_0 = 2$? Justifique.

7. Com base no trabalho realizado nas questões anteriores, quais as condições (critérios) devem ser satisfeitas para que uma função f seja contínua num ponto $x = x_0$?

8. Resolva novamente a questão 3 apresentando justificativas baseadas nas conclusões apresentadas na questão 7.

Tarefa 14: Confeccionando uma Caixa.

PARTE 1 – Estudo matemático da confecção.

Pretende-se construir uma caixa, com formato de paralelepípedo sem usar tampa, a partir de uma folha de zinco medindo 10×10 cm. Para montá-la recorta-se quadrados congruentes dos cantos dessa folha de zinco e dobra-se as faces para cima, como indicado no esquema da figura 1 (considere que as dimensões das dobras são desprezíveis).

Abra o arquivo “Caixa zinco” que contém uma simulação dessa confecção. Poderá observar, nessa simulação, que é possível obter caixas com volumes diversos ao retirarmos quatro quadrados da folha de zinco com diferentes medidas de lado x, como ilustrado na figura 1 a seguir, para o caso de $x = 4{,}5$.

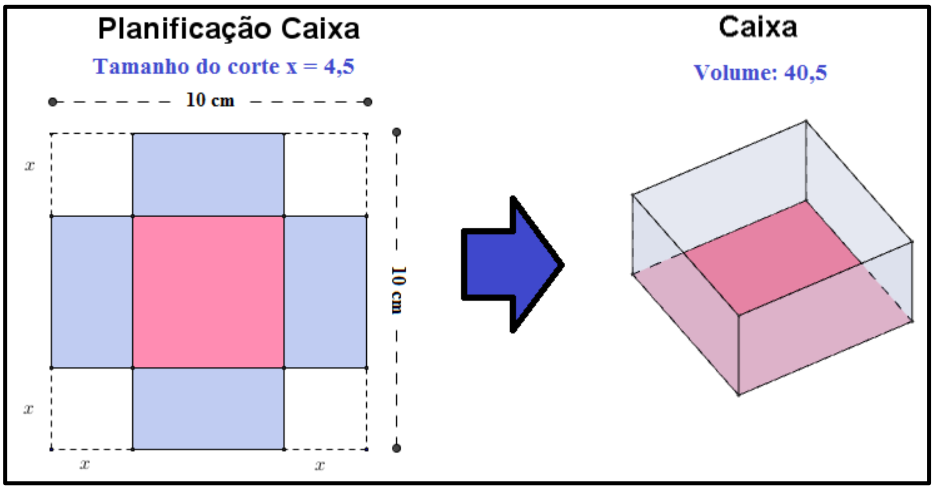


Figura 1. Simulação da confecção de uma caixa criada no GeoGebra.

Clique no botão  (localizado no canto inferior esquerdo da tela) e, a partir da animação proporcionada pelo arquivo, observe os diversos modelos de caixas obtidas a partir dos cortes e seus respectivos volumes. Clique no botão  para parar a animação. Se quiser poderá optar por modificar, manualmente, o tamanho do corte de medida x e observar o volume da caixa construída. A partir dessas observações responda às questões a seguir:

1. Para um corte de 4 cm qual é o volume da caixa confeccionada? E para 2 cm? E para 5 cm?

2. Entre que valores o x pode variar? Justifique.

3. Escreva uma expressão algébrica que forneça o volume V da caixa em função do corte de medida x?

4. A função V, resposta da questão anterior, é contínua em todo o seu domínio? Justifique sua resposta.

5. Modificando o valor de x (no seletor apresentado no canto superior esquerdo), apresente uma estimativa desse valor para o qual a caixa confeccionada apresente o maior volume.

Agora clique no botão opções (localizado no canto superior esquerdo) e marque as caixas: “gráfico”. Observe no plano cartesiano, o gráfico da função V que relaciona o tamanho do corte de medida x ao volume da caixa confeccionada. Clique novamente no botão  para verificar a animação dessa relação funcional ou se preferir, altere o tamanho do corte de medida x e observe que o ponto P, que marca o valor do volume da caixa, percorre o gráfico traçado.

6. Observando no gráfico a localização do ponto P, indique em que posição do gráfico ele se encontra quando a caixa apresenta o maior volume?

Clique no botão opções e marque a caixa “Reta Tangente”. Observe que essa ferramenta apresenta o traçado da reta tangente à função V, no ponto P. A seguir movimente o valor de x e observe como varia o declive dessa reta tangente.

7. Que tipo de reta se torna essa reta tangente quando o ponto P atinge a posição indicada na questão 6? Qual seria o valor do seu declive (inclinação). Justifique a sua resposta.

PARTE 2 – Encontrando as medidas da caixa de maior volume.

8. **a)** Como é possível obter, algebricamente, o valor de x associado ao declive da reta tangente ao gráfico de V no ponto P descrito na questão 7? **b)** Determine esse valor. Justifique rigorosamente o procedimento adotado.

9. O valor encontrado é o mesmo que você estimou na questão 5? Caso seja diferente, explique o motivo dessa diferença?

10. Qual é o volume máximo que a caixa pode ter? Quais as dimensões da caixa de volume máximo?

Tarefa 15 – Reconhecendo a definição formal de continuidade num ponto.

Considere uma função real $f: D \to \mathbb{R}$ sobre a qual se sabe que:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que se } x \in D \text{ e } |x-2| < \delta \text{ então } |f(x) - 4| < \varepsilon$$

1. Explique o significado da expressão anterior.

2. Qual o conceito matemático que essa expressão define?

3. Como poderia representar esse conceito simbolicamente? E geometricamente?

Assumindo que $f(2) = 4$, a expressão apresentada anteriormente poderia ser reformulada e apresentada por:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que se } x \in D \text{ e } |x-2| < \delta \text{ então } |f(x) - f(2)| < \varepsilon$$

Sendo assim, responda:

4. Explique o significado desta nova expressão?

5. Qual o conceito matemático que essa nova expressão representa?

6. Como poderia representar esse conceito simbolicamente? E geometricamente?

7. O que você pode concluir sobre a diferença entre a definição formal dos **dois** conceitos matemáticos apresentados anteriormente?

8. Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 3$. Prove, por meio da definição formal, que a função f é contínua em x_0.

Tarefa 16: O Teorema do Valor Intermédio - TVI.

Abra o arquivo “TVI” que contém um cenário desenvolvido a partir do GeoGebra. Nesse cenário está apresentado o gráfico de uma função real f. Observe que o parâmetro k é responsável por alterações na imagem da função f, no ponto $x_0 = 2$. A partir dessas considerações responda às questões a seguir:

1. Em que intervalo fechado $[a, b]$ a função f está definida?

2. Essa função (original) é contínua no intervalo aberto $]a, b[$? Justifique.

3. Ela é contínua nos extremos a e b? Justifique.

Agora clique no botão “reta horizontal”. É apresentada o gráfico de uma reta d paralela ao eixo Ox, passando pelo ponto de ordenada $y = d$, com $f(a) < d < f(b)$.

Clique no parâmetro d e arraste-o para a direita e para a esquerda, aumentando e diminuindo o seu valor. Observe as modificações que ocorrem na interseção do gráfico da função f com a reta d. Registe algumas notas sobre o que observou para responder à questão seguinte.

4. Será possível garantir a existência de um valor $x_0 \in]a, b[$ de forma a que, para qualquer valor de d, com $f(a) < d < f(b)$, o ponto $y = d$ seja imagem de x_0, isto é, $f(x_0) = d$? Justifique.

Agora altere o valor do parâmetro k de forma que a função f seja contínua em todo o seu domínio. Em seguida, volte a clicar no parâmetro d, arrastando-o para a direita e para a esquerda e verifique as modificações que ocorrem na intersecção do gráfico da função f com a reta d. Registe algumas notas sobre o que observou para responder às questões seguintes.

5. Após estas modificações, é possível garantir a existência de algum valor $x_0 \in]a, b[$ de forma que o ponto $y = d$ seja imagem de x_0, isto é, $f(x_0) = d$, qualquer que seja o valor de $f(a) < d < f(b)$? Justifique.

6. Como poderá garantir a existência do x_0 descrito na questão anterior? Esta condição aplica-se também no caso de $f(b) < d < f(a)$? Justifique.

7. Como poderia utilizar o resultado anterior para provar que $p(x) = x^7 - 5x^4 + 3$ possui pelo menos uma raiz real no intervalo $[1,2]$.

Tarefa 17: Aplicando o que foi aprendido.

Resolva as questões a seguir, apresentando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Existe algum número real que somado com 2 é exatamente igual ao seu cubo?

2. Um alpinista iniciou a escalada do morro do Pão de Açúcar, na Urca, às 7h da manhã e atingiu o pico as 12h. Ele resolveu acampar no pico para tirar algumas maravilhosas fotos da cidade do Rio de Janeiro e descer no dia seguinte. Na manhã do dia seguinte ele iniciou sua descida novamente às 7h, chegando de volta ao nível da subida às 12h. Mostre que o alpinista, em algum momento da descida, estava na mesma altura e na mesma hora do que na subida do dia anterior.

(**Dica:** defina três funções f, g e $h = f - g$, sendo f e g, respectivamente, para subida e decida, que descrevam a altura em função do tempo).

3. Analise as afirmações seguintes e conclua se é verdadeira ou falsa. Justifique o porquê de ser verdadeira ou falsa, provando as alternativas verdadeiras e apresentando um contraexemplo para as falsas, isto é, um exemplo que contradiz a afirmação.

a) Se f é uma função contínua com $f(0) > 0$ e $f(1) > 0$ então teremos que $f(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$.

b) Se f é uma função em que $f(1) > 0 > f(2)$ então f possui raiz em $[0,2]$.

c) Se f é uma função contínua com $f(2) < k < f(4)$ então teremos que existe $c \in [2,4]$ tal que $f(c) = k$.

d) Se f é uma função contínua com $k < f(2) < f(4)$ então **não** existe $c \in (2,4)$ tal que $f(c) = k$.

Anexo 11 – As tarefas de avaliação

1ª Tarefa de Avaliação

1ª Questão

Analise cada alternativa a seguir e determine se é verdadeiro ou Falso. Se for falso dê um contraexemplo ou corrija. Se for verdadeiro justifique.

a) Se $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$ mas $f(2) = 1$ então não existe $\lim_{x \to 2} f(x)$.

b) Se $f(2) = 4$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$ então $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$.

c) Seja $h(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ uma função racional. Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $q(x_0) = 0$ então pode-se afirmar que $x - x_0 = 0$ é uma assíntota vertical.

d) Uma possível definição formal para $\lim_{x \to -1} f(x) = 3$ é $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $|x + 1| < \varepsilon$ então $|f(x) - 2| < \delta$.

2ª Questão

Para calcular o limite $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{2x^2-1}$, um aluno argumentou da seguinte forma:

Como $\lim_{x \to \infty} x^2 + 1 = \infty$ e $\lim_{x \to \infty} 2x^2 - 1 = \infty$, então $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{2x^2-1} = \frac{\infty}{\infty} = 1$

A argumentação acima está correta? E a conclusão, isto é, o valor do limite está correto? Justifique suas respostas.

3ª Questão

Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$. Mostre que que a função f possui apenas uma assíntota vertical e que não possui assíntota horizontal.

4ª Questão

Considere a função f que satisfaz a seguinte condição:

$$\frac{x \cdot sen(x)}{2 - 2\cos(x)} \leq f(x) \leq \frac{x}{2\sqrt{x+1} - 2}$$

para todos os valores x numa vizinhança de $x_0 = 0$. A partir dessa informação encontre $\lim_{x \to 0} f(x)$.

.

5ª Questão

Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x}}}}{2x}$

b) $\lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{sec(4x)-1}{x^2}\right)$

6ª Questão:

Seja $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n-1}{x-1} = n.$

2ª Tarefa de Avaliação

1ª Questão

Analise cada alternativa a seguir e determine se é verdadeiro ou Falso. Se for falso dê um contraexemplo ou corrija. Se for verdadeiro justifique.

a) Se f é uma função contínua em $[1,4]$ com $f(1) \cdot f(4 < 0$, então podemos afirmar que f tem pelo menos uma raiz no intervalo $]1,4[$.

b) Se f é uma função contínua em $[a, b]$ com $f(a) > 0$ e $f(b) > 0$, então $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$.

c) Se f é uma função que satisfaz a condição $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A < 0$ tal que se $x \in D_f$ e $x < A \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon$, então é possível afirmar $x - 3 = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f.

d) Se f é uma função que satisfaz as seguintes condições:

(i) $f(2) = 5$ e

(ii) $\forall\, \delta > 0\ \exists\, \varepsilon > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $|x - 2| < \varepsilon$ então $|f(x) - 5| < \delta$

Então pode-se afirmar que f é contínua em $x_0 = 2$.

2ª Questão

Para resolver a questão descrita abaixo

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & se \quad x > 1 \\ 1 & se \quad x = 1 \\ \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & se \quad x < 1 \end{cases}$$

É possível afirmar que a função f é contínua em $x_0 = 1$? Justifique.

um aluno argumentou da seguinte maneira:

Resposta do aluno:

Sim. Como $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x + 1 = 1 + 1 = 2$ e $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$, temos que o limite existe e é igual a 2 $\left(\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2\right)$. Assim, é possível afirmar que a função f é contínua em $x_0 = 1$.

RESOLVA:

A argumentação do aluno está correta? E a conclusão, isto é, "a função f é contínua em $x_0 = 1$" está correta? Justifique suas respostas.

3ª Questão

Prove que os gráficos das funções reais $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$ e $g(x) = x^3 - x$ tem intersecção em pelo menos um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$.

4ª Questão

Seja f é uma função contínua em $x_0 \in D_f$.

a) Considere que $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m$ onde $m, h \in \mathbb{R}$. Qual é a interpretação geométrica de m?

b) Usando as ideias apresentadas na questão anterior, prove que toda função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ apresenta valor mínimo ou máximo em $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

5ª Questão

A administração de um hospital vai implementar um novo sistema que pretende reduzir o tempo de espera para cirurgias. O seguinte modelo foi experimentalmente determinado para prever que, em t meses, o percentual h de pacientes que podem ser operados, sem entrar em lista de espera, é dado pela função:

$$h(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50, & se \quad 0 \leq t \leq 10 \\ \dfrac{38t - 100}{0,4t}, & se \quad 10 < t \end{cases}$$

a) Qual é o domínio da função h? Essa função h é contínua em todo seu domínio? Justifique sua resposta.

b) Nessas condições, explique por que o percentual de pacientes que podem ser operados pode atingir 70% no primeiro ano de implementação desse sistema.

c) Qual é o percentual máximo de pacientes que podem ser operados a longo prazo? Interprete o resultado encontrado em relação às informações do problema.